

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Τρίτη 2 Ιουνίου 2026

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2026

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούσιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_\kappa}{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa}{v}.$$

Όμως το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος v του δείγματος, δηλαδή $v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa = v$. Άρα

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = \frac{v}{v} = 1.$$

Ο.Ε.Δ.

A2

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η **μεσαία παρατήρηση**, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο **μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων**, όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

A3

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **(πρώτη) παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f' .

A4

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Το εύρος υπολογίζεται εύκολα, ΔΕΝ θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις.
β.	Σωστό	Είναι ακριβώς το κριτήριο της 1ης παραγώγου για μέγιστο: μηδενισμός της f' στο x_0 και αλλαγή προσήμου από θετικό σε αρνητικό.
γ.	Σωστό	Είναι ο ορισμός του βιβλίου: το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.
δ.	Λάθος	Στον κανόνα παραγώγισης πηλίκου ο παρονομαστής είναι το ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ της g , δηλαδή $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{(g(x))^2}$.
ε.	Σωστό	Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος n του δείγματος.

ΘΕΜΑ Β

B1

$$f(x) = (\frac{1}{3})x^3 - x^2 - 3x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

B2

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0. \text{ Διακρίνουσα } \Delta = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4, \text{ οπότε } x = \frac{2 \pm 4}{2}, \text{ δηλαδή } x = -1 \text{ ή } x = 3.$$

Ο συντελεστής στο x^2 είναι θετικός, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 3$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0	+
$f(x)$	αύξουσα	μέγιστο	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1) - 1 + 3 + 1 = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

Θέση	Είδος ακροτάτου	Τιμή
$x = -1$	τοπικό μέγιστο	$f(-1) = \frac{8}{3}$
$x = 3$	τοπικό ελάχιστο	$f(3) = -8$

B3

Σημείο επαφής: $f(0) = 1$, δηλαδή $A(0, 1)$.

Συντελεστής διεύθυνσης: $f'(0) = 0 - 0 - 3 = -3$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - 1 = -3 \cdot (x - 0)$

$$y = -3x + 1$$

B4

Είναι $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

Η αντικατάσταση $x = -1$ δίνει $\frac{0}{0}$, οπότε απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $(x + 1)$:

$$\frac{f'(x)}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{x + 1} = x - 3, \text{ για } x \neq -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x - 3) = -1 - 3 = -4.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με -4 .

ΘΕΜΑ Γ**Γ1**

Οι $n = 7$ παρατηρήσεις είναι 4, 5, 4, κ , 0, 3, 7, με μέση τιμή $\bar{x} = 4$:

$$\frac{4 + 5 + 4 + \kappa + 0 + 3 + 7}{7} = 4 \Leftrightarrow \frac{23 + \kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5.$$

Άρα $\kappa = 5$.

Γ2

Για $\kappa = 5$ οι παρατηρήσεις είναι 4, 5, 4, 5, 0, 3, 7. Σε αύξουσα σειρά:

0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Έχουμε $n = 7$ παρατηρήσεις, δηλαδή περιττό πλήθος, οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία (4η) παρατήρηση.

$\delta = 4$ βιβλία.

Γ3

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 4$ (ακέραιος), οπότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της διακύμανσης:

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
4	0	0
5	1	1
4	0	0
5	1	1
0	-4	16
3	-1	1
7	3	9
Σύνολο	0	28

$$s^2 = \frac{28}{7} = 4.$$

Η διακύμανση είναι $s^2 = 4$.

Γ4

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%.$$

Ένα δείγμα θεωρείται ομοιογενές εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

Επειδή $CV = 50\% > 10\%$, το δείγμα ΔΕΝ είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Έστω x και y οι διαστάσεις του ορθογώνιου. Το εμβαδόν είναι 100 m^2 :

$$x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}, \text{ με } x > 0.$$

Η περίμετρος είναι $\Pi = 2x + 2y$, οπότε ως συνάρτηση του x :

$$\Pi(x) = 2x + 2 \cdot \left(\frac{100}{x} \right)$$

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, x > 0$$

Δ2

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = \frac{2(x - 10)(x + 10)}{x^2}.$$

Ο παρονομαστής x^2 είναι θετικός και, για $x > 0$, ο παράγοντας $(x + 10)$ είναι επίσης θετικός. Άρα το πρόσημο της Π' είναι το πρόσημο του $(x - 10)$:

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

$$\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 10$$

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$	–	0	+
$\Pi(x)$	φθίνουσα	ελάχιστο	αύξουσα

Η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 10$.

Για $x = 10$ είναι $y = \frac{100}{10} = 10 = x$, δηλαδή οι δύο διαστάσεις είναι ίσες.

Άρα το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο (πλευράς 10 m, με ελάχιστη περίμετρο $\Pi(10) = 20 + 20 = 40$ m).

Δ3

Τα x_1, x_2 ανήκουν στο διάστημα $(0, 10)$, όπου η Π είναι **γνησίως φθίνουσα** (από το Δ2).

Αριθμητής: επειδή $x_1 < x_2$ και η Π είναι γνησίως φθίνουσα:

$$\Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0.$$

Παρονομαστής: επειδή $x_1 < x_2$:

$$x_1 - x_2 < 0.$$

Το πηλίκο θετικού με αρνητικό αριθμό είναι αρνητικό.

Άρα $A < 0$, δηλαδή η παράσταση A είναι αρνητική.

Δ4

$$\text{Από το Δ2: } \Pi'(x) = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}.$$

Η αντικατάσταση $x = 10$ δίνει στον παρονομαστή $\sqrt{100} - 10 = 0$ και στον αριθμητή 0, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{10x} + 10$:

$$(\sqrt{10x} - 10) \cdot (\sqrt{10x} + 10) = 10x - 100 = 10(x - 10).$$

Επομένως, για $x \neq 10$,

$$\begin{aligned} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \left[\frac{2(x-10)(x+10)}{x^2} \right] \cdot \frac{\sqrt{10x} + 10}{10(x-10)} \\ &= 2(x+10) \cdot \frac{\sqrt{10x} + 10}{10x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2} &= 2 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{100} + 10}{10 \cdot 100} \\ &= 40 \cdot \frac{20}{1000} = \frac{800}{1000} = 0,8. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $0,8 = \frac{4}{5}$.