

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Τρίτη 3 Ιουνίου 2025

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2025

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούσιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$. Ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n}.$$

Στον αριθμητή η $\bar{x}$ αφαιρείται n φορές, οπότε

$$= \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_n) - n \cdot \bar{x}}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - \bar{x}.$$

Όμως από τον ορισμό της μέσης τιμής είναι $\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \bar{x}$, επομένως

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Άρα ο αριθμητικός μέσος των διαφορών από τη μέση τιμή είναι ίσος με 0.

Σημείωση: Ακριβώς γι' αυτό η διασπορά δεν ορίζεται ως ο μέσος των αποκλίσεων: θα ήταν πάντα μηδέν. Γι' αυτό υψώνουμε τις αποκλίσεις στο τετράγωνο.

A2

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Με τις ίδιες μονάδες μέτρησης εκφράζεται η ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ. Η διακύμανση εκφράζεται στο τετράγωνο των μονάδων (π.χ. cm ² αν οι παρατηρήσεις είναι σε cm).
β.	Σωστό	Το εύρος R = μεγαλύτερη – μικρότερη παρατήρηση είναι το απλούστερο μέτρο διασποράς.
γ.	Σωστό	Είναι η ερμηνεία του βιβλίου: η παράγωγος της f στο x ₀ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του y = f(x) ως προς το x, όταν x = x ₀ .
δ.	Σωστό	Είναι ο κανόνας παραγώγισης του πολλαπλασίου: (c·f(x))' = c·f'(x).
ε.	Λάθος	Ισχύει το αντίστροφο: αν f'(x) < 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως ΦΘΙΝΟΥΣΑ στο Δ.

A4

α) (c)' = 0

β) (x²)' = 2x

ΘΕΜΑ Β

B1

Βήμα 1 — η άγνωστη συχνότητα. Το άθροισμα των συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος:

$v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 = 10.$

Βήμα 2 — σχετικές συχνότητες: $f_i\% = 100 \cdot \frac{v_i}{50} = 2 \cdot v_i.$

Βήμα 3 — αθροιστικές συχνότητες: $N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i.$

Πλήθος ωρών x _i	Συχνότητα v _i	Σχετική f _i %	Αθροιστική N _i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	—

Σημείωση: Έλεγχος: το άθροισμα των f_i% είναι 100 και η τελευταία αθροιστική συχνότητα είναι N₅ = 50 = n.

B2

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_i \cdot v_i)}{v} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{50}$$

$$= \frac{0 + 15 + 22 + 24 + 24}{50} = \frac{85}{50} = 1,7.$$

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 1,7$ ώρες.

B3

Έχουμε $v = 50$ παρατηρήσεις, δηλαδή άρτιο πλήθος, οπότε η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα της 25ης και της 26ης παρατήρησης της αύξουσας διάταξης.

Από τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων: $N_1 = 10$ και $N_2 = 25$, άρα οι παρατηρήσεις από την 11η έως την 25η έχουν τιμή 1, ενώ οι από την 26η έως την 36η έχουν τιμή 2.

Επομένως η 25η παρατήρηση είναι 1 και η 26η είναι 2:

$$\delta = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Η διάμεσος είναι $\delta = 1,5$ ώρες.

B4

α) «Το πολύ 3 ώρες» σημαίνει 0, 1, 2 ή 3 ώρες, δηλαδή την αθροιστική συχνότητα της τιμής 3:

$$N_4 = 44, \text{ ποσοστό} = \frac{44}{50} = 0,88 = 88\%.$$

Το 88% των υπαλλήλων εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες.

β) Η αύξηση κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο είναι μετασχηματισμός $y = x + 4$:

$$\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7.$$

Η νέα μέση τιμή είναι 5,7 ώρες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, \text{ άρα}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x \cdot (x - 2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Το τριώνυμο $-6x^2 + 12x$ έχει αρνητικό συντελεστή στο x^2 , άρα είναι θετικό ΜΕΤΑΞΥ των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	0 +	0	—
f(x)	φθίνουσα	ελάχιστο	μέγιστο	φθίνουσα

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Γ2

Από το κριτήριο της 1ης παραγώγου, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x = 2$.

$$f(0) = \alpha \text{ (τοπικό ελάχιστο)}$$

$$f(2) = -2 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + \alpha = -16 + 24 + \alpha = 8 + \alpha \text{ (τοπικό μέγιστο)}$$

Το ημίθροισμα των τιμών των ακροτάτων είναι -8 :

$$\frac{\alpha + (8 + \alpha)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{2\alpha + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow \alpha + 4 = -8 \Leftrightarrow \alpha = -12.$$

$$\text{Άρα } \alpha = -12.$$

Γ3

$$\text{Για } \alpha = -12 \text{ είναι } f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12.$$

$$\text{Σημείο επαφής: } f(1) = -2 + 6 - 12 = -8, \text{ δηλαδή } M(1, -8).$$

$$\text{Συντελεστής διεύθυνσης: } f'(1) = -6 + 12 = 6.$$

$$\text{Εξίσωση εφαπτομένης: } y - (-8) = 6 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 8 = 6x - 6$$

$$(\epsilon): y = 6x - 14$$

Γ4

Για $\alpha = -12$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ (από το Γ1).

$$\text{Άρα για κάθε } x \in [2, +\infty) \text{ με } x \geq 2 \text{ ισχύει } f(x) \leq f(2) = 8 + \alpha = 8 - 12 = -4.$$

Δηλαδή

$$-2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4$$

$$-2x^3 + 6x^2 \leq 8$$

Διαιρούμε με -2 (αλλάζει η φορά της ανισότητας):

$$x^3 - 3x^2 \geq -4$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [2, +\infty).$$

Ο.Ε.Δ.

ΘΕΜΑ Δ**Δ1**

Το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ είναι, εξ ορισμού, η $f'(1)$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}, \text{ άρα } f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7.$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

$$\text{Άρα } \lambda = -4.$$

Δ2

Για $\lambda = -4$ είναι $f'(x) = x^2 - 8x + 7$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$. Διακρίνουσα $\Delta = 64 - 28 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$, οπότε $x = \frac{8 \pm 6}{2}$, δηλαδή $x = 1$ ή $x = 7$.

Ο συντελεστής στο x^2 είναι θετικός, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 7$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0	+
$f(x)$	αύξουσα	μέγιστο	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$ και γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$.

Δ3

Αριθμητής: τα 2020 και 2025 ανήκουν στο $[7, +\infty)$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $2020 < 2025$:

$f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$.

Παρονομαστής: τα $\frac{3}{2} = 1,5$ και $\frac{5}{2} = 2,5$ ανήκουν στο $[1, 7]$, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$:

$f(\frac{3}{2}) > f(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow f(\frac{3}{2}) - f(\frac{5}{2}) > 0$.

Το πηλίκο δύο θετικών αριθμών είναι θετικό.

Άρα $A > 0$, δηλαδή η παράσταση A είναι θετική.

Δ4

Για $\lambda = -4$ είναι $f'(x) = x^2 - 8x + 7$ και $f''(x) = 2x - 8$.

Αριθμητής:

$f'(x) - f''(x) + 1 = (x^2 - 8x + 7) - (2x - 8) + 1 = x^2 - 10x + 16$.

Το τριώνυμο $x^2 - 10x + 16$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 100 - 64 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$ και ρίζες $x = \frac{10 \pm 6}{2}$,

δηλαδή $x = 2$ και $x = 8$. Άρα $x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$.

Παρονομαστής: η αντικατάσταση $x = 2$ δίνει $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, οπότε πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x+1} + \sqrt{3}$:

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = (x+1) - 3 = x - 2$.

Επομένως, για $x \neq 2$,

$$\frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = (x-2)(x-8) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}}{x-2}$$

$$= (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 8) \cdot (\sqrt{x + 1} + \sqrt{3}) = (2 - 8) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $-12\sqrt{3} \approx -20,78$.