

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Σάββατο 1 Ιουνίου 2024

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2024

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούσιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

A2

α) Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα v_i , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β) Ο σταθμικός μέσος δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum (x_i \cdot w_i)}{\sum w_i}.$$

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Η $f(x) = x $ δεν έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$: για $h < 0$ το πηλίκο $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ ισούται με -1 και για $h > 0$ ισούται με $+1$, οπότε το όριο δεν υπάρχει.
β.	Λάθος	Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ μεταβλητές. Για τις ποιοτικές χρησιμοποιείται το ραβδόγραμμα.
γ.	Σωστό	Είναι ο τύπος του βιβλίου: $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. (Ενώ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$, με μείον.)
δ.	Σωστό	Είναι ο ορισμός του βιβλίου: οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

ΘΕΜΑ Β

B1

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 = x^2 - 6x + 5$$
$$f'(x) = x^2 - 6x + 5$$

B2

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0. \text{ Διακρίνουσα } \Delta = 36 - 20 = 16, \sqrt{\Delta} = 4, \text{ οπότε } x = \frac{6 \pm 4}{2}, \text{ δηλαδή } x = 1 \text{ ή } x = 5.$$

Ο συντελεστής στο x^2 είναι θετικός, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 5$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0	+
$f(x)$	αύξουσα	μέγιστο	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στο $[5, +\infty)$.

$$f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$
$$f(5) = \frac{1}{3} \cdot 125 - 3 \cdot 25 + 25 + \frac{1}{3} = \frac{125}{3} + \frac{1}{3} - 50 = 42 - 50 = -8$$

Θέση	Είδος ακροτάτου	Τιμή
$x = 1$	τοπικό μέγιστο	$f(1) = \frac{8}{3}$
$x = 5$	τοπικό ελάχιστο	$f(5) = -8$

B3

Σημείο επαφής: $f(0) = \frac{1}{3}$, δηλαδή $(0, \frac{1}{3})$.

Συντελεστής διεύθυνσης: $f'(0) = 0 - 0 + 5 = 5$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - \frac{1}{3} = 5 \cdot (x - 0)$

$$y = 5x + \frac{1}{3}$$

B4

Το ζητούμενο όριο είναι, εξ ορισμού, η παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = -1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1).$$

$$f'(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 12.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η αντικατάσταση $x = 1$ δίνει $\frac{1+6-7}{2-2} = \frac{0}{0}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή.

Το τριώνυμο $x^2 + 6x - 7$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 + 28 = 64$, $\sqrt{\Delta} = 8$ και ρίζες $x = \frac{-6 \pm 8}{2}$, δηλαδή $x = 1$ και $x = -7$. Άρα $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$.

Επίσης $2x - 2 = 2(x - 1)$.

Για $x \neq 1$ απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $(x - 1)$:

$$s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Άρα $s = 4$.

Γ2

Από τον ορισμό του συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ με $CV = 20\% = 0,20$ και $s = 4$:

$$0,20 = \frac{4}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{4}{0,20} = 20.$$

Άρα η μέση τιμή των θερμοκρασιών είναι $\bar{x} = 20^\circ\text{C}$.

Γ3

Οι $n = 5$ τιμές είναι 22, 18, $20 + \kappa$, 14, 16, με μέση τιμή 20:

$$\frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90 + \kappa}{5} = 20 \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10.$$

Άρα $\kappa = 10$.

Διάμεσος: για $\kappa = 10$ οι τιμές είναι 22, 18, 30, 14, 16. Σε αύξουσα σειρά:

14, 16, 18, 22, 30

Έχουμε $n = 5$ παρατηρήσεις (περιττό πλήθος), οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία (3η):

$$\delta = 18^\circ \text{C}$$

Γ4

Η αύξηση κατά 10% σημαίνει πολλαπλασιασμό κάθε τιμής με 1,1, δηλαδή $y = 1,1 \cdot x$.

$$\bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x} = 1,1 \cdot 20 = 22$$

$$s_y = |1,1| \cdot s_x = 1,1 \cdot 4 = 4,4$$

$$CV = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4,4}{22} = 0,20 = 20\%.$$

Ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών παραμένει 20%.

Σημείωση: Ο συντελεστής μεταβολής είναι αναλλοίωτος όταν όλες οι παρατηρήσεις πολλαπλασιαστούν με την ίδια θετική σταθερά: πολλαπλασιάζονται τόσο η τυπική απόκλιση όσο και η μέση τιμή, οπότε ο λόγος τους δεν αλλάζει.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο στο O, με κάθετες πλευρές $(OA) = x$, $(OB) = y$ και υποτείνουσα $(AB) = 10$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$x^2 + y^2 = 10^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2.$$

Επειδή το y είναι μήκος, δηλαδή θετικό, παίρνουμε τη θετική ρίζα:

$$y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$$

Πεδίο ορισμού: πρέπει $x > 0$ (μήκος) και $100 - x^2 > 0$ (ώστε και το y να είναι θετικό μήκος):

$$100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow -10 < x < 10.$$

Σε συνδυασμό με $x > 0$, το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(0, 10)$.

Δ2

Ο ρυθμός μεταβολής της $y = f(x)$ ως προς x είναι η παράγωγος $f'(x)$. Με τον κανόνα $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f'(x) = \frac{(100 - x^2)'}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

Για $x = 8$:

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 64}} = -\frac{8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $-\frac{4}{3}$.

Σημείωση: Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι όσο μεγαλώνει η μία κάθετη πλευρά, η άλλη μικραίνει — αναμενόμενο, αφού η υποτείνουσα μένει σταθερή.

Δ3

Είναι $f(6) = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$, οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6},$$

που είναι, εξ ορισμού, η παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = 6$:

$$f'(6) = -\frac{6}{\sqrt{100 - 36}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $-\frac{3}{4}$.

Δ4

Στο διάστημα $(0, 10)$ είναι $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$, αφού $x > 0$ και ο παρονομαστής είναι θετικός.

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 10)$.

Οι τιμές $x_1 = 2,3$, $x_3 = 2,8$ και $x_2 = 3,5$ ανήκουν όλες στο $(0, 10)$ και ισχύει

$$x_1 = 2,3 < x_3 = 2,8 < x_2 = 3,5.$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, οι ανισότητες αντιστρέφονται:

$$f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

Ο.Ε.Δ.