

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Σάββατο 3 Ιουνίου 2023

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2023

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούσιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Ζητείται η απόδειξη του βιβλίου για την παράγωγο της συνάρτησης $c \cdot f(x)$.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$. Έχουμε

$$F(x + h) - F(x) = c \cdot f(x + h) - c \cdot f(x) = c \cdot (f(x + h) - f(x))$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = c \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(c \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right) = c \cdot f'(x).$$

Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

A2

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι **πραγματικός αριθμός**, τότε λέμε ότι η f

είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για κάθε i , αφού $0 \leq v_i \leq v$. Η σχετική συχνότητα δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητική.
β.	Σωστό	Είναι ο κανόνας παραγώγισης αθροίσματος: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
γ.	Σωστό	Είναι η πρώτη ιδιότητα της τυπικής απόκλισης σε κανονική ή περίπου κανονική κατανομή: το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
δ.	Λάθος	Ο σωστός τύπος είναι $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x > 0$, όχι $\frac{2}{\sqrt{x}}$.
ε.	Σωστό	Η διάμεσος είναι μέτρο θέσης, μαζί με τη μέση τιμή, τον σταθμικό μέσο και την επικρατούσα τιμή.

ΘΕΜΑ Β

B1

$$f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$$

B2

Ο άξονας x' έχει συντελεστή διεύθυνσης 0, οπότε η παραλληλία δίνει $f'(1) = 0$:

$$6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

Άρα $\alpha = 3$.

B3

$$\text{Για } \alpha = 3 \text{ είναι } f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1$$

Ο συντελεστής στο x^2 είναι θετικός, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 1$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0	+
$f(x)$	αύξουσα	μέγιστο	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

$$f(-2) = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 - 12 \cdot (-2) + 10 = -16 + 12 + 24 + 10 = 30$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 + 10 = 3$$

Θέση	Είδος ακροτάτου	Τιμή
$x = -2$	τοπικό μέγιστο	$f(-2) = 30$
$x = 1$	τοπικό ελάχιστο	$f(1) = 3$

B4

Η αντικατάσταση $x = 1$ δίνει $\frac{0}{0}$, οπότε απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $(x - 1)$:

$$\frac{f'(x)}{x-1} = \frac{6(x+2)(x-1)}{x-1} = 6(x+2), \text{ για } x \neq 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 6(x+2) = 6 \cdot 3 = 18.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 18.

ΘΕΜΑ Γ**Γ1**

Οι κεντρικές τιμές που λείπουν είναι $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$ και $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20 + 15 + n_3 + 5 = 40 + n_3$.

Από τον τύπο της μέσης τιμής σε πίνακα συχνοτήτων $\bar{x} = \frac{\sum(x_i \cdot n_i)}{n}$ με $\bar{x} = 14$:

$$\frac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot n_3 + 22 \cdot 5}{40 + n_3} = 14$$

$$(200 + 210 + 18n_3 + 110) = 14 \cdot (40 + n_3)$$

$$520 + 18n_3 = 560 + 14n_3 \Leftrightarrow 4n_3 = 40 \Leftrightarrow n_3 = 10.$$

Άρα $n_3 = 10$.

Γ2

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα n_i	$x_i \cdot n_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο	—	50	700

Έλεγχος: $\bar{x} = \frac{700}{50} = 14$, όπως δίνεται.

Γ3

Επειδή η μέση τιμή είναι ακέραιος, εφαρμόζουμε τον ορισμό της διακύμανσης για πίνακα

συχνοτήτων: $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{n_i}{n}$.

x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
10	20	-4	$16 \cdot 20 = 320$
14	15	0	$0 \cdot 15 = 0$
18	10	4	$16 \cdot 10 = 160$
22	5	8	$64 \cdot 5 = 320$
Σύνολο	50	—	800

$$s^2 = \frac{800}{50} = 16.$$

Η διακύμανση είναι $s^2 = 16$.

Γ4

$$s = \sqrt{16} = 4.$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \approx 0,2857 = 28,57\%.$$

Επειδή $CV \approx 28,57\% > 10\%$, το δείγμα ΔΕΝ είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Η $f(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$, δηλαδή στο $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = -(-2) \cdot x^{-3} = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο του x^3 , δηλαδή το πρόσημο του x :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	δεν ορίζεται	+
$f(x)$	φθίνουσα	—	αύξουσα

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Σημείωση: Η μονοτονία δηλώνεται χωριστά σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού: το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, οπότε δεν μπορούμε να ενώσουμε τα δύο διαστήματα.

Δ2

Το διάστημα $[-4, -1]$ περιέχεται στο $(-\infty, 0)$, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα για κάθε $x \in [-4, -1]$ με $-4 \leq x \leq -1$ ισχύει

$$f(-4) \geq f(x) \geq f(-1).$$

$$f(-4) = -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16} \quad \text{και} \quad f(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1.$$

Επομένως $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$ για κάθε $x \in [-4, -1]$.

Ο.Ε.Δ.

Δ3

Σημείο επαφής: $f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$, δηλαδή $M(1, -1)$.

Συντελεστής διεύθυνσης: $f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - (-1) = 2 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = 2x - 2$

(ε): $y = 2x - 3$

Δ4

Τα σημεία A, B, Γ ανήκουν στην ευθεία (ε): $y = 2x - 3$, άρα για κάθε i ισχύει

$$y_i = 2 \cdot x_i - 3,$$

δηλαδή γραμμικός μετασχηματισμός με $c = 2$ και $d = -3$. Από τις ιδιότητες:

$$\bar{y} = c \cdot \bar{x} + d = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$s_y = |c| \cdot s_x = |2| \cdot 2 = 4$$

$$CV = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\%.$$

Ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων είναι $CV = 80\%$.