

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Σάββατο 4 Ιουνίου 2022

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2022

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούσιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x + h)$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Άρα $f'(x) = 2x$.

A2

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η **μεσαία παρατήρηση**, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο **μέσος όρος (ημιάθροισμα)** των **δύο μεσαίων παρατηρήσεων**, όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Ο συντελεστής μεταβολής ΕΙΝΑΙ ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης — γι' αυτό ακριβώς χρησιμοποιείται για τη σύγκριση δειγμάτων με διαφορετικές μονάδες ή σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές.
β.	Σωστό	Είναι το κριτήριο μονοτονίας του βιβλίου: θετική παράγωγος σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ σημαίνει γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο Δ.
γ.	Λάθος	Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο ΘΕΣΗΣ. Μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

A4

$$\alpha) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ με } x > 0$$

$$\beta) (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ΘΕΜΑ Β

B1

Οι απουσίες των $n = 5$ μαθητών είναι: 25, 10, 5, 20, 15.

$$\bar{x} = \frac{25 + 10 + 5 + 20 + 15}{5} = \frac{75}{5} = 15.$$

$$R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{μικρότερη παρατήρηση} = 25 - 5 = 20.$$

Άρα $\bar{x} = 15$ απουσίες και $R = 20$ απουσίες.

B2

Επειδή η μέση τιμή είναι ακέραιος, εφαρμόζουμε τον ορισμό της διακύμανσης:

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
25	10	100
10	-5	25
5	-10	100
20	5	25
15	0	0
Σύνολο	0	250

$$s^2 = \frac{250}{5} = 50.$$

Η διακύμανση είναι $s^2 = 50$.

B3

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07.$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{7,07}{15} \approx 0,4714 = 47,14\%.$$

Ένα δείγμα θεωρείται ομοιογενές εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

Επειδή $CV \approx 47,14\% > 10\%$, το δείγμα ΔΕΝ είναι ομοιογενές.

Σημείωση: Οι απουσίες κυμαίνονται από 5 έως 25 γύρω από μέση τιμή 15 — τεράστια σχετική διασπορά, που ο CV την αποτυπώνει αριθμητικά.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι η τιμή $f'(1)$.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1, \text{ άρα } f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha.$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha - 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15.$$

Άρα $\alpha = 15$.

Γ2

Για $\alpha = 15$ είναι $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ και $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$.

Σημείο επαφής: $f(2) = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$, δηλαδή $M(2, 3)$.

Συντελεστής διεύθυνσης: $f'(2) = 3 \cdot 4 - 18 \cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = -9$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - 3 = -9 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 3 = -9x + 18$

$$y = -9x + 21$$

Γ3

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x - 1)(x - 5)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 5$$

Ο συντελεστής στο x^2 είναι θετικός, άρα το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 5$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0	+
$f(x)$	αύξουσα	μέγιστο	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στο $[5, +\infty)$.

$$f(1) = 1 - 9 + 15 + 1 = 8 \text{ και } f(5) = 125 - 225 + 75 + 1 = -24.$$

Θέση	Είδος ακροτάτου	Τιμή
$x = 1$	τοπικό μέγιστο	$f(1) = 8$
$x = 5$	τοπικό ελάχιστο	$f(5) = -24$

Γ4

Η αντικατάσταση $x = 1$ δίνει $\frac{0}{0}$, οπότε παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή:

$$f'(x) = 3(x-1)(x-5) \text{ και } x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Για $x \neq 1$ απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $(x-1)$:

$$\frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-5)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = 3 \cdot \frac{1-5}{1+1} = -\frac{12}{2} = -6.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με -6 .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Πεδίο ορισμού: πρέπει $x + 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$, άρα $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Παράγωγος (κανόνας πηλίκου):

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}, \text{ άρα } \bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = 9.$$

$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } s = \frac{1}{2 \cdot f'(1)} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Επομένως $\bar{x} = 9$ λεπτά και $s = 2$ λεπτά.

Δ3

Εντοπίζουμε τα όρια σε πολλαπλάσια της τυπικής απόκλισης γύρω από τη μέση τιμή:

$$5 = 9 - 4 = \bar{x} - 2s, 11 = 9 + 2 = \bar{x} + s, 15 = 9 + 6 = \bar{x} + 3s.$$

Από 5 έως 11 λεπτά: σπάμε το διάστημα στα δύο μέρη εκατέρωθεν της $\bar{x}$.

Διάστημα	Ποσοστό	Από πού προκύπτει
$(\bar{x} - 2s, \bar{x}) = (5, 9)$	47,5%	το μισό του 95%
$(\bar{x}, \bar{x} + s) = (9, 11)$	34%	το μισό του 68%
$(5, 11)$	81,5%	47,5% + 34%

Πλήθος = $0,815 \cdot 2000 = 1630$ μαθητές.

Πάνω από 15 λεπτά: εκτός του $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ βρίσκεται το $100\% - 99,7\% = 0,3\%$ και, λόγω συμμετρίας, δεξιά του $\bar{x} + 3s$ το μισό, δηλαδή το $0,15\%$.

Πλήθος = $0,0015 \cdot 2000 = 3$ μαθητές.

1630 μαθητές έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά και 3 μαθητές πάνω από 15 λεπτά.

Δ4

Η αύξηση του χρόνου κατά 3 λεπτά είναι μετασχηματισμός της μορφής $y = x + c$ με $c = 3$.

$$\tilde{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12 \text{ λεπτά}$$

$$s_y = s_x = 2 \text{ λεπτά}$$

Η νέα μέση τιμή είναι 12 λεπτά και η τυπική απόκλιση παραμένει 2 λεπτά.

Σημείωση: Η πρόσθεση σταθεράς μετατοπίζει ολόκληρη την κατανομή χωρίς να αλλάζει τις μεταξύ των παρατηρήσεων αποστάσεις, άρα δεν επηρεάζει τη διασπορά.