

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Πέμπτη 17 Ιουνίου 2021

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2021

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούςιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η **(απόλυτη) συχνότητα v_i** , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Σημείωση: Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος: $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$.

A2

Ζητείται η απόδειξη του βιβλίου για την παράγωγο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$.

Έχουμε

$$f(x + h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Άρα $f'(x) = (c)' = 0$.

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Αυτός είναι ο ορισμός των ΣΥΝΕΧΩΝ μεταβλητών. Οι διακριτές μεταβλητές παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές, π.χ. ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης.
β.	Σωστό	Είναι ο ορισμός του βιβλίου: το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.
γ.	Λάθος	Η ανισότητα είναι ανάποδα. Γνησίως αύξουσα σημαίνει ότι για $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Η σχέση $f(x_1) > f(x_2)$ ορίζει τη γνησίως φθίνουσα.

A4

$$\alpha) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \text{ με } x \neq 0$$

$$\beta) (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ όπου } n \text{ φυσικός αριθμός}$$

$$\gamma) (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Β

B1

Ένα σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0. Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 1, το σημείο $(1, 0)$ ανήκει σε αυτήν, δηλαδή $f(1) = 0$:

$$1^2 - \alpha \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

Άρα $\alpha = 3$.

B2

Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = x^2 - 3x + 2$, που ως πολυωνυμική ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα ο μόνος

περιορισμός για την $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ προέρχεται από τον παρονομαστή:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1.$$

Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, δηλαδή $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

B3

Η αντικατάσταση $x = 1$ δίνει $\frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή.

Παραγοντοποιούμε: το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 8 = 1$ και ρίζες $x = 1$, $x = 2$, άρα $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Επίσης $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Για $x \neq 1$ απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $(x - 1)$:

$$g(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 2}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\frac{1}{2}.$$

B4

Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = x^2 - 3x + 2$, άρα $f'(x) = 2x - 3$.

Σημείο επαφής: $f(0) = 0 - 0 + 2 = 2$, δηλαδή $M(0, 2)$.

Συντελεστής διεύθυνσης: $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$y - 2 = -3 \cdot x$$

$$y = -3x + 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Κεντρικές τιμές: η κεντρική τιμή κάθε κλάσης είναι το ημιάθροισμα των ορίων της.

$$x_1 = \frac{4 + 8}{2} = 6, x_2 = \frac{8 + 12}{2} = 10, x_3 = \frac{12 + 16}{2} = 14, x_4 = \frac{16 + 20}{2} = 18.$$

Συχνότητες από το ιστόγραμμα: τα ύψη των ορθογωνίων δίνουν τις σχετικές συχνότητες $f_i = 0,10, f_2 = 0,30, f_3 = 0,20, f_4 = 0,40$, οπότε $v_i = f_i \cdot v$ με $v = 50$:

$$v_1 = 0,10 \cdot 50 = 5, v_2 = 0,30 \cdot 50 = 15, v_3 = 0,20 \cdot 50 = 10, v_4 = 0,40 \cdot 50 = 20.$$

Τόξα κυκλικού διαγράμματος: $\alpha_i = \left(\frac{v_i}{v} \right) \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ$.

Έτη υπηρεσίας	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική f_i	Τόξο α_i
[4, 8)	6	5	0,10	36°
[8, 12)	10	15	0,30	108°
[12, 16)	14	10	0,20	72°
[16, 20)	18	20	0,40	144°
Σύνολο	—	50	1	360°

Σημείωση: Οι τιμές $v_1 = 5, \alpha_1 = 36^\circ, x_3 = 14, v_4 = 20$ και $\alpha_4 = 144^\circ$ που δίνονταν ήδη στον πίνακα επαληθεύονται, άρα η ανάγνωση του ιστογράμματος είναι σωστή.

Γ2

«Τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας» σημαίνει τις κλάσεις [8, 12), [12, 16) και [16, 20):

$$v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 20 = 45.$$

45 εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας.

Γ3

«Λιγότερο από 16 έτη» σημαίνει τις κλάσεις [4, 8), [8, 12) και [12, 16):

$$v_1 + v_2 + v_3 = 5 + 15 + 10 = 30 \text{ εκπαιδευτικοί.}$$

$$\text{Ποσοστό} = \frac{30}{50} = 0,60 = 60\%.$$

Το 60% των εκπαιδευτικών έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Γ4

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο **σχετικών** συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων, δηλαδή

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,10 + 0,30 + 0,20 + 0,40 = 1.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με 1.

Σημείωση: Αν το ερώτημα αφορούσε πολύγωνο ΑΠΟΛΥΤΩΝ συχνοτήτων, το εμβαδόν θα ήταν ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή 50.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Το ορθογώνιο έχει μήκος x και πλάτος y , με περίμετρο 80 m:

$$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x.$$

Το εμβαδόν είναι $E = x \cdot y$, οπότε ως συνάρτηση του x :

$$E(x) = x \cdot (40 - x) = 40x - x^2 \Leftrightarrow \mathbf{E(x) = -x^2 + 40x}.$$

Πεδίο ορισμού: οι διαστάσεις είναι μήκη, άρα πρέπει

$$x > 0 \text{ και } y > 0 \Leftrightarrow 40 - x > 0 \Leftrightarrow x < 40.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της E είναι το διάστημα $(0, 40)$.

Δ2

$$E'(x) = (-x^2 + 40x)' = -2x + 40$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 40 > 0 \Leftrightarrow x < 20$$

x	0	20	40
$E'(x)$	+	0	−
$E(x)$	αύξουσα	μέγιστο	φθίνουσα

Η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 20]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[20, 40)$.

Δ3

Από το κριτήριο της 1ης παραγώγου, η E παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 20$:

$$E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400.$$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 20$ m και η μέγιστη τιμή του είναι 400 m^2 .

Σημείωση: Τότε $y = 40 - 20 = 20$ m, δηλαδή το οικόπεδο με το μέγιστο εμβαδόν είναι τετράγωνο.

Δ4

Και τα δύο μήκη ανήκουν στο διάστημα $[20, 40)$, όπου η συνάρτηση E είναι **γνησίως φθίνουσα** (από το $\Delta 2$).

Επειδή $29,5 < 34,2$, από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης προκύπτει

$$E(29,5) > E(34,2).$$

Άρα το οικόπεδο Α, με μήκος 29,5 m, έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Σημείωση: Η αιτιολόγηση με τη μονοτονία είναι αυτή που ζητείται· ο αριθμητικός υπολογισμός των δύο εμβαδών ($E(29,5) = 309,75 \text{ m}^2$ και $E(34,2) = 198,36 \text{ m}^2$) απλώς την επιβεβαιώνει.