

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Πέμπτη 18 Ιουνίου 2020

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2020

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούσιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

A2

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Η $f(x) = x $ ΔΕΝ έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$: για $h < 0$ το πηλίκο $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ ισούται με -1 , ενώ για $h > 0$ ισούται με $+1$, οπότε το όριο δεν υπάρχει.
β.	Σωστό	Είναι ο ορισμός του βιβλίου: τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \dots$
γ.	Σωστό	Είναι ο ορισμός της σχετικής συχνότητας: $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

A3

$$\alpha) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\beta) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ με } x > 0$$

$$\gamma) (\sin x)' = -\eta\mu x$$

A4

Ζητείται η απόδειξη του βιβλίου για την παράγωγο της $f(x) = x^2$.

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

Άρα $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ Β

B1

Βήμα 1 — το μέγεθος του δείγματος. Για την τιμή $x = 2$ δίνονται $v_3 = 10$ και $F_3\% = 90$, ενώ για την $x = 1$ δίνεται $F_2\% = 70$. Άρα

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 90 - 70 = 20\%.$$

Δηλαδή 10 μαθητές αντιστοιχούν στο 20% του δείγματος:

$$v = \frac{10}{0,20} = 50 \text{ μαθητές.}$$

Βήμα 2 — η πρώτη γραμμή. Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο, άρα $f_1\% = 40$ και

$$v_1 = 40\% \cdot 50 = 20, N_1 = 20, F_1\% = 40.$$

Βήμα 3 — οι υπόλοιπες γραμμές, με διαδοχικές διαφορές και αθροίσματα:

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100	—	—

Σημείωση: Έλεγχοι: το άθροισμα των v_i είναι $50 = v$, το άθροισμα των $f_i\%$ είναι 100 και η τελευταία αθροιστική συχνότητα είναι $N_4 = 50 = v$.

B2

Από τον πίνακα, για $x = 3$ βιβλία είναι $f_4\% = 10$.

Το 10% των μαθητών έχουν διαβάσει τρία βιβλία (δηλαδή 5 μαθητές).

B3

«Τουλάχιστον ένα βιβλίο» σημαίνει 1, 2 ή 3 βιβλία, δηλαδή όλοι εκτός από όσους διάβασαν 0 βιβλία.

$$\text{Πλήθος} = v - v_1 = 50 - 20 = 30.$$

$$(\text{Ισοδύναμα: } v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 5 = 30.)$$

30 μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο.

B4

«Το πολύ δύο βιβλία» σημαίνει 0, 1 ή 2 βιβλία, δηλαδή ακριβώς την αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής $x = 2$:

$$F_3\% = 90\%.$$

Το 90% των μαθητών διάβασαν το πολύ δύο βιβλία.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1, -2)$, άρα $f(-1) = -2$:

$$(-1)^3 - \lambda \cdot (-1)^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow -1 - \lambda + 2 = -2 \Leftrightarrow 1 - \lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Άρα $\lambda = 3$.

Γ2

Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

Γ3

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Το τριώνυμο έχει θετικό συντελεστή στο x^2 , άρα είναι θετικό εκτός των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	0	+
$f(x)$	αύξουσα	μέγιστο	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

$$f(0) = 2 \text{ και } f(2) = 8 - 12 + 2 = -2.$$

Θέση	Είδος ακροτάτου	Τιμή
$x = 0$	τοπικό μέγιστο	$f(0) = 2$
$x = 2$	τοπικό ελάχιστο	$f(2) = -2$

Γ4

Είναι $f'(x) + 3 = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$ και $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.

Η αντικατάσταση $x = 1$ δίνει $\frac{0}{0}$, οπότε απλοποιούμε:

$$\frac{f'(x) + 3}{f''(x)} = \frac{3(x - 1)^2}{6(x - 1)} = \frac{x - 1}{2}, \text{ για } x \neq 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.

ΘΕΜΑ Δ**Δ1**

Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης στη δύναμη:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) \\ &= 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2 \cdot (x + 2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{f'(x) = 40 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2)}$$

Δ2

Το ζητούμενο όριο είναι, εξ ορισμού, η παράγωγος της f στο σημείο $x_0 = -2$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = f'(-2).$$

$$f'(-2) = 40 \cdot ((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5)^{19} \cdot (-2 + 2) = 40 \cdot (4 - 8 + 5)^{19} \cdot 0 = 40 \cdot 1^{19} \cdot 0 = 0.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.

Δ3

Ο άξονας x έχει συντελεστή διεύθυνσης 0, οπότε ζητάμε το σημείο x_0 όπου $f'(x_0) = 0$:

$$40 \cdot (x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} \cdot (x_0 + 2) = 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ και θετικό συντελεστή στο x^2 , άρα είναι πάντα θετικό και δεν μηδενίζεται ποτέ. Επομένως

$$x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

$$f(-2) = ((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5)^{20} = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1.$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $(-2, 1)$ με συντελεστή διεύθυνσης 0 έχει εξίσωση

$$y - 1 = 0 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow \mathbf{y = 1}.$$

Δ4

Η απόσταση των σημείων $A(x, 1)$ και $O(0, 0)$ είναι

$$d(x) = \sqrt{(x - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 1}, \text{ με } x > 0.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ως προς x είναι η παράγωγος $d'(x)$:

$$d'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Για $x = 1$:

$$d'(1) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ μονάδες μήκους ανά μονάδα του x .