

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Σάββατο 8 Ιουνίου 2019

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2019

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούςιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

Ζητείται η απόδειξη του βιβλίου για την παράγωγο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$.

Έχουμε

$$f(x + h) - f(x) = (x + h) - x = h$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Άρα $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

A2

α) Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.

β) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται:

- σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές (π.χ. ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού),
- σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) (π.χ. το ύψος και το βάρος των μαθητών, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης).

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Ισχύει $(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, δηλαδή με μείον. Το $+\frac{1}{x^2}$ είναι η παράγωγος του $-\frac{1}{x}$.
β.	Σωστό	Είναι ο κανόνας παραγωγίσης σύνθετης συνάρτησης (αλυσωτή παραγωγή): παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g .
γ.	Λάθος	Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο ΘΕΣΗΣ, όχι διασποράς. Μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.
δ.	Σωστό	Τα τόξα των κυκλικών τομέων είναι ανάλογα προς τις συχνότητες, οπότε $\alpha_i = \frac{n_i}{n} \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ$.
ε.	Σωστό	Είναι η ιδιότητα του ορίου γινομένου: αν και τα δύο όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, το όριο του γινομένου ισούται με το γινόμενο των ορίων.

ΘΕΜΑ Β

B1

Από τη διακύμανση βρίσκουμε πρώτα την τυπική απόκλιση:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Από τον ορισμό του συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ έχουμε:

$$0,20 = \frac{2}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2}{0,20} = 10.$$

Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x} = 10$.

B2

Το δείγμα έχει $n = 6$ παρατηρήσεις: 11, 7, κ, 13, 11, 10.

$$\bar{x} = \frac{11 + 7 + \kappa + 13 + 11 + 10}{6} = \frac{52 + \kappa}{6}$$

$$\frac{52 + \kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow 52 + \kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8.$$

Άρα $\kappa = 8$ (δεκτή, αφού δίνεται $\kappa > 0$).

B3

Για $\kappa = 8$ οι τιμές είναι: 11, 7, 8, 13, 11, 10.

Διάμεσος: διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά:

7, 8, 10, 11, 11, 13

Έχουμε $n = 6$ παρατηρήσεις, δηλαδή άρτιο πλήθος, οπότε η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων (3ης και 4ης) παρατηρήσεων:

$$\delta = \frac{10 + 11}{2} = 10,5.$$

Εύρος: $R = \text{μεγαλύτερη} - \text{μικρότερη} = 13 - 7 = 6.$

Άρα $\delta = 10,5$ και $R = 6$.

B4

Αν από κάθε τιμή αφαιρεθεί ο αριθμός 2, πρόκειται για μετασχηματισμό της μορφής $y = x + c$ με $c = -2$. Από τις ιδιότητες:

$$\bar{y} = \bar{x} + c = 10 - 2 = 8$$

$s_y = s_x = 2$ (η πρόσθεση σταθεράς ΔΕΝ αλλάζει την τυπική απόκλιση)

$$CV = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\%.$$

Επειδή $CV = 25\% > 10\%$, το δείγμα των νέων τιμών ΔΕΝ είναι ομοιογενές.

Σημείωση: Η αφαίρεση του 2 άφησε ίδια τη διασπορά αλλά μίκρυνε τη μέση τιμή, οπότε ο συντελεστής μεταβολής μεγάλωσε (από 20% σε 25%).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Είναι $x^2 - 2x + 10 = (x - 1)^2 + 9 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Με τον κανόνα $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 10)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός, άρα το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο του αριθμητή $x - 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	φθίνουσα	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ ελάχιστο, και επειδή το 1 είναι η μοναδική ρίζα της f' , το ελάχιστο αυτό είναι ολικό:

$$f(1) = \sqrt{1 - 2 + 10} = \sqrt{9} = 3.$$

Άρα $f(x) \geq f(1) = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή **$f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.**

Γ3

$f(5) = \sqrt{25 - 10 + 10} = \sqrt{25} = 5$, άρα το σημείο επαφής είναι το $M(5, 5)$.

$$f'(5) = \frac{5 - 1}{\sqrt{25 - 10 + 10}} = \frac{4}{5}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - f(5) = f'(5) \cdot (x - 5)$

$$y - 5 = \frac{4}{5} \cdot (x - 5) \Leftrightarrow y - 5 = \left(\frac{4}{5}\right)x - 4$$

$$\varepsilon: y = \left(\frac{4}{5}\right)x + 1$$

Γ4

Σημείο Α (τομή με τον άξονα $x'x$): θέτουμε $y = 0$.

$$\left(\frac{4}{5}\right)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

Άρα $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.

Σημείο Β (τομή με τον άξονα $y'y$): θέτουμε $x = 0$.

$$y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 1 = 1.$$

Άρα $B(0, 1)$.

$A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ και $B(0, 1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, άρα

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2.$$

Είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 1$.

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.**

Σημείωση: Η f' μηδενίζεται μόνο σε ένα μεμονωμένο σημείο και διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του $x = 1$, οπότε (σύμφωνα με το σχόλιο του βιβλίου) η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Σύγκριση των $f\left(\frac{3}{8}\right)$ και $f\left(\frac{5}{6}\right)$: είναι $\frac{3}{8} = 0,375$ και $\frac{5}{6} \approx 0,833$, δηλαδή $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$. Επειδή η

f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right).$$

Δ2

Για $\lambda = 3$ είναι $f'(x) = 3(x - 1)^2$. Επίσης $x^2 - x = x(x - 1)$.

Η αντικατάσταση $x = 1$ δίνει $\frac{0}{0}$, οπότε παραγοντοποιούμε και απλοποιούμε:

$$\frac{f'(x)}{(x-1) \cdot (x^2-x)} = \frac{3(x-1)^2}{(x-1) \cdot x \cdot (x-1)} = \frac{3(x-1)^2}{x \cdot (x-1)^2}$$

και για $x \neq 1$ απλοποιούμε τον παράγοντα $(x-1)^2$:

$$= \frac{3}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x} = \frac{3}{1} = 3.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 3.

Δ3

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $(x, f(x))$ είναι $\lambda(x) = f'(x) = 3(x - 1)^2$.

Ζητάμε πότε η $\lambda(x)$ γίνεται ελάχιστη.

$$\lambda'(x) = f''(x) = 6(x - 1) = 6x - 6$$

$$\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\lambda'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\lambda'(x)$	−	0	+
$\lambda(x) = f'(x)$	φθίνουσα	ελάχιστο	αύξουσα

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης είναι για $x = 1$ και ισούται με $\lambda(1) = 3(1 - 1)^2 = 0$.

$$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1.$$

Το ζητούμενο σημείο είναι το M(1, 1).

Δ4

Είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x$, άρα $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$.

Σύμφωνα με το σχόλιο του βιβλίου, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα όταν η f' **διατηρεί πρόσημο**, δηλαδή όταν η f' δεν αλλάζει πρόσημο.

Το τριώνυμο $3x^2 - 6x + \lambda$ έχει θετικό συντελεστή στο x^2 , οπότε διατηρεί (θετικό) πρόσημο ακριβώς όταν η διακρίνουσά του είναι μη θετική:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda = 36 - 12\lambda \leq 0 \Leftrightarrow 36 \leq 12\lambda \Leftrightarrow \lambda \geq 3.$$

Η μικρότερη τιμή του λ για την οποία η f δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda = 3$.

Σημείωση: Για $\lambda = 3$ προκύπτει ακριβώς η περίπτωση του Δ1: $f'(x) = 3(x - 1)^2 \geq 0$, με τη ρίζα $x = 1$ να μην αλλάζει πρόσημο.