

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Σάββατο 9 Ιουνίου 2018

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2018

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούςιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α

A1

α) Απόλυτη συχνότητα v_i . Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα v_i , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β) Σχετική συχνότητα f_i . Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , δηλαδή $f_i = \frac{v_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

γ) Απόδειξη ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας έχουμε διαδοχικά:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n}.$$

Όμως το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$. Επομένως

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{n}{n} = 1.$$

A2

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της.

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι **πραγματικός αριθμός**, τότε λέμε ότι η f

είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 , συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται « f τονούμενο του x_0 ».

A3

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Σωστό	Είναι η πρώτη ιδιότητα της τυπικής απόκλισης σε κανονική ή περίπου κανονική κατανομή: το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
β.	Λάθος	Η σωστή σχέση είναι $(\sin x)' = \cos x$, με το μείον. Χωρίς μείον ισχύει για το ημίτονο: $(\cos x)' = -\sin x$.
γ.	Λάθος	Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση ΤΟΣΟ των ποιοτικών ΟΣΟ ΚΑΙ των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.
δ.	Σωστό	Η διακύμανση s^2 είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή, δηλαδή μέτρο διασποράς.
ε.	Λάθος	Ισχύει το αντίστροφο: αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως ΦΘΙΝΟΥΣΑ στο Δ . Γνησίως αύξουσα είναι όταν $f'(x) > 0$.

ΘΕΜΑ Β

B1

Έχουμε $n = 5$ παρατηρήσεις, δηλαδή περιττό πλήθος, οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία (3η) παρατήρηση της αύξουσας διάταξης.

Οι τέσσερις γνωστοί αριθμοί, διατεταγμένοι, είναι: 12, 14, 16, 18.

Για να είναι η διάμεσος ίση με 15, ο πέμπτος αριθμός $4\alpha - 1$ πρέπει να καταλάβει την 3η θέση και να είναι ίσος με 15:

$$4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

Έλεγχος: για $\alpha = 4$ είναι $4\alpha - 1 = 15$ και η διάταξη γίνεται 12, 14, 15, 16, 18, με μεσαία παρατήρηση το 15.

Άρα $\alpha = 4$.

B2

Για $\alpha = 4$ οι αριθμοί είναι: 14, 12, 18, 15, 16.

$$\bar{x} = \frac{14 + 12 + 18 + 15 + 16}{5} = \frac{75}{5} = 15.$$

Επειδή η μέση τιμή είναι ακέραιος, εφαρμόζουμε τον ορισμό της διακύμανσης:

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
14	-1	1
12	-3	9
18	3	9
15	0	0
16	1	1
Σύνολο	0	20

$$s^2 = \frac{20}{5} = 4.$$

Η διακύμανση είναι $s^2 = 4$.

B3

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{15} \approx 0,1333 = 13,33\%.$$

Ένα δείγμα θεωρείται ομοιογενές εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

Επειδή $CV \approx 13,33\% > 10\%$, το δείγμα ΔΕΝ είναι ομοιογενές.

B4

Οι νέες τιμές προκύπτουν από τις παλιές με τον μετασχηματισμό $y = -2x + 5$, δηλαδή $c = -2$ και $d = 5$.

Από τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης:

$$\bar{y} = c \cdot \bar{x} + d = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$$

$$s_y = |c| \cdot s_x = |-2| \cdot 2 = 4$$

Επειδή $\bar{y} < 0$, στον τύπο του συντελεστή μεταβολής χρησιμοποιούμε την $|\bar{y}|$:

$$CV = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{25} = 0,16 = 16\%.$$

Ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών είναι $CV = 16\%$.

Σημείωση: Ο πολλαπλασιασμός από μόνος του δεν αλλάζει τον CV· η πρόσθεση του 5 τον αλλάζει, γιατί μεταβάλλει τη μέση τιμή χωρίς να μεταβάλλει την τυπική απόκλιση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$$f(x) = 2x^3 - 3κx^2 + κ, \text{ άρα } f'(x) = 6x^2 - 6κx.$$

Ο άξονας x' έχει συντελεστή διεύθυνσης 0. Η εφαπτομένη στο $M(1, f(1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)$, οπότε η παραλληλία δίνει:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 6\kappa \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1.$$

Άρα $\kappa = 1$.

Γ2

Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x είναι η ίδια η παράγωγος $f'(x)$.

Για $\kappa = 1$: $f'(x) = 6x^2 - 6x$. Θέτουμε $g(x) = f'(x) = 6x^2 - 6x$ και ζητάμε τότε η g γίνεται ελάχιστη.

$$g'(x) = f''(x) = 12x - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x) = f''(x)$	—	0	+
$g(x) = f'(x)$	φθίνουσα	ελάχιστο	αύξουσα

Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$, με ελάχιστη τιμή $f'(\frac{1}{2}) = 6 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$.

Γ3

Προσοχή: η εφαπτομένη ζητείται για τη γραφική παράσταση της f' , όχι της f . Άρα ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι η παράγωγος της f' , δηλαδή η f'' .

$$\text{Για } \kappa = 1: f'(x) = 6x^2 - 6x \text{ και } f''(x) = 12x - 6.$$

$$\text{Σημείο επαφής: } f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 6 + 6 = 12, \text{ άρα το σημείο είναι το } (-1, 12).$$

$$\text{Συντελεστής διεύθυνσης: } f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18.$$

$$\text{Εξίσωση εφαπτομένης: } y - 12 = -18 \cdot (x - (-1)) \Leftrightarrow y - 12 = -18x - 18$$

$$y = -18x - 6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Είναι $x^2 + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης και τον τύπο $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 4} + 2018)' = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} + 0 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Δ2

Ο παρονομαστής $\sqrt{x^2 + 4}$ είναι πάντα θετικός, άρα το πρόσημο της f' ταυτίζεται με το πρόσημο του αριθμητή x .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	φθίνουσα	ελάχιστο	αύξουσα

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 0$.

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 4} + 2018 = 2 + 2018 = 2020.$$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 0$ με τιμή $f(0) = 2020$.

Σημείωση: Επειδή το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f' και η f είναι φθίνουσα αριστερά και αύξουσα δεξιά του, το ελάχιστο αυτό είναι ολικό.

Δ3

Αντικαθιστούμε την $f'(x)$ από το Δ1 στον αριθμητή:

$$(x^2 + 4) \cdot f'(x) = (x^2 + 4) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = x \cdot \sqrt{x^2 + 4}$$

Άρα η παράσταση γίνεται, για $x \neq 0$,

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 4} - 2x}{x^2} = x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}.$$

Η αντικατάσταση $x = 0$ δίνει $\frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2 + 4} + 2$:

$$A(x) = \frac{(x^2 + 4) - 4}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x^2}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = \frac{0}{\sqrt{4} + 2} = \frac{0}{4} = 0.$$

Το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.