

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑ.Λ. · Πέμπτη 8 Ιουνίου 2017

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

Ενδεικτικές απαντήσεις με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου

ΕΤΟΣ

2017

Οι απαντήσεις είναι **ενδεικτικές**: κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη λύση είναι αποδεκτή. Οι ορισμοί και οι αποδείξεις δίνονται **αυτούςιοι** όπως στο σχολικό βιβλίο, η μονοτονία και τα ακρότατα προσδιορίζονται αποκλειστικά με το **κριτήριο της 1ης παραγώγου** (το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι εκτός εξεταστέας ύλης) και τα ποσοστά της κανονικής κατανομής από τις ιδιότητες 68% - 95% - 99,7%.

© **panellinies.online — Panellinies Online**. Το αρχείο διατίθεται δωρεάν για προσωπική μελέτη. Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η μεταπώληση, καθώς και η αφαίρεση ή αλλοίωση του υδατογραφήματος και των σημάτων προέλευσης — με οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένης της αυτόματης επεξεργασίας εικόνας ή εργαλείων τεχνητής νοημοσύνης. Κάθε σελίδα φέρει μοναδικό κωδικό ιχνηλάτησης.

ΘΕΜΑ Α**A1**

Ζητείται η απόδειξη του βιβλίου για την παράγωγο του αθροίσματος.

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

A2

Πρόταση	Απάντηση	Αιτιολόγηση
α.	Λάθος	Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ΠΟΙΟΤΙΚΗΣ μεταβλητής. Για τις ποσοτικές χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.
β.	Σωστό	Είναι ακριβώς ο ορισμός της συνεχούς συνάρτησης: μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
γ.	Σωστό	Το εύρος $R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{μικρότερη παρατήρηση}$ είναι το απλούστερο μέτρο διασποράς (δεν θεωρείται όμως αξιόπιστο, γιατί βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις).

A3

α) $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, όπου p ρητός αριθμός.

β) $(\sin x)' = -\cos x$.

γ) $\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$, δηλαδή ο σταθμικός μέσος είναι το άθροισμα των γινομένων τιμή x συντελεστής στάθμισης, διά το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης.

ΘΕΜΑ Β**B1**

Υπολογίζουμε πρώτα το κ . Η αντικατάσταση $x = 1$ στο όριο δίνει $\frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή, οπότε παραγοντοποιούμε.

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 + 8 = 9$ και ρίζες $x = 1$, $x = -2$, άρα $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Άρα $\kappa = 3$.

B2

Για $\kappa = 3$ οι βαθμοί του φοιτητή στα 10 μαθήματα είναι:

4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4

(από τα 4, κ , 5, 6, $2\kappa + 1$, 4, 6, $\kappa + 2$, 6, 4 με $\kappa = 3$: $\kappa = 3$, $2\kappa + 1 = 7$, $\kappa + 2 = 5$).

$$\bar{x} = \frac{4 + 3 + 5 + 6 + 7 + 4 + 6 + 5 + 6 + 4}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

Η μέση τιμή των βαθμών είναι $\bar{x} = 5$.

B3

Επειδή η μέση τιμή είναι ακέραιος, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της διακύμανσης:

$$s^2 = \frac{(4-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2}{10}$$

Βαθμός t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
4	-1	1
3	-2	4
5	0	0
6	1	1
7	2	4
4	-1	1
6	1	1
5	0	0
6	1	1
4	-1	1
Σύνολο	0	14

$$s^2 = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Η διακύμανση είναι $s^2 = 1,4$.

Σημείωση: Το άθροισμα της μεσαίας στήλης είναι 0 — όπως πρέπει: ο αριθμητικός μέσος των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι πάντα μηδέν. Είναι ένας γρήγορος έλεγχος ότι δεν έγινε αριθμητικό λάθος.

B4

Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,4} \approx 1,18$ (δίνεται).

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,18}{5} = 0,236 = 23,6\%.$$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = 23,6\%$.

Σημείωση: Επειδή $CV = 23,6\% > 10\%$, το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η κανονική κατανομή είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή. Άρα ακριβώς το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες της $\bar{x}$ και το 50% μικρότερες.

Δίνεται ότι το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών.

Επομένως $\bar{x} = 40$ έτη.

Γ2

Από τις ιδιότητες της τυπικής απόκλισης, στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.

Άρα εκτός του διαστήματος αυτού βρίσκεται το $100\% - 68\% = 32\%$ και, λόγω συμμετρίας, το μισό του, δηλαδή το 16%, βρίσκεται αριστερά του $\bar{x} - s$.

Δίνεται ότι το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, άρα

$$\bar{x} - s = 35 \Leftrightarrow 40 - s = 35 \Leftrightarrow s = 5.$$

Επομένως η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$ έτη.

Γ3

$$\text{Είναι } 45 = 40 + 5 = \bar{x} + s.$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως στο Γ2, δεξιά του $\bar{x} + s$ βρίσκεται το 16% των παρατηρήσεων.

$$\text{Πλήθος} = 16\% \cdot 400 = 0,16 \cdot 400 = 64.$$

64 εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Γ4

$$\text{Είναι } 30 = 40 - 2 \cdot 5 = \bar{x} - 2s \text{ και } 45 = 40 + 5 = \bar{x} + s.$$

Σπάμε το ζητούμενο διάστημα σε δύο μέρη, εκατέρωθεν της μέσης τιμής:

Διάστημα	Ποσοστό	Από πού προκύπτει
$(\bar{x} - 2s, \bar{x}) = (30, 40)$	47,5%	το μισό του 95%
$(\bar{x}, \bar{x} + s) = (40, 45)$	34%	το μισό του 68%
$(30, 45)$	81,5%	$47,5\% + 34\%$

$$\text{Πλήθος} = 81,5\% \cdot 400 = 0,815 \cdot 400 = 326.$$

326 εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 και μικρότερη των 45 ετών.

ΘΕΜΑ Δ**Δ1**

Η $f(x) = -(\frac{1}{3})x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ είναι πολυωνυμική, άρα παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 = -x^2 + 4x - 3.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει αρνητικό συντελεστή στο x^2 , άρα είναι θετικό ΜΕΤΑΞΥ των ριζών του:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	—	0 +	0	—
$f(x)$	φθίνουσα	ελάχιστο	μέγιστο	φθίνουσα

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

Δ2

Στη θέση $x = 1$ η f' αλλάζει πρόσημο από αρνητική σε θετική, άρα η f παρουσιάζει εκεί τοπικό ελάχιστο. Στη θέση $x = 3$ η f' αλλάζει από θετική σε αρνητική, άρα η f παρουσιάζει εκεί τοπικό μέγιστο.

$$f(1) = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 + 1 = -9 + 18 - 9 + 1 = 1$$

Θέση	Είδος ακροτάτου	Τιμή
$x = 1$	τοπικό ελάχιστο	$f(1) = -\frac{1}{3}$
$x = 3$	τοπικό μέγιστο	$f(3) = 1$

Δ3

Η ευθεία $y = x + 2017$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε ζητάμε το σημείο x_0 όπου $f'(x_0) = 1$:

$$-x_0^2 + 4x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

$$f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 1 = -\frac{8}{3} + 8 - 6 + 1 = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}.$$

Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(2, \frac{1}{3})$.

Δ4

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4.$$

Τα σημεία $M_1, \dots, M_5$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = f''(x)$, δηλαδή για κάθε i ισχύει

$$y_i = f''(x_i) = -2 \cdot x_i + 4.$$

Πρόκειται δηλαδή για γραμμικό μετασχηματισμό των τετμημένων της μορφής $y = c \cdot x + d$ με $c = -2$ και $d = 4$. Από τις ιδιότητες της τυπικής απόκλισης:

$$s_y = |c| \cdot s_x = |-2| \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Η τυπική απόκλιση των τεταγμένων είναι $s_y = 6$.

Σημείωση: Η πρόσθεση της σταθεράς 4 δεν επηρεάζει καθόλου την τυπική απόκλιση: μετακινεί όλες τις τιμές το ίδιο, χωρίς να αλλάζει τις μεταξύ τους αποστάσεις.