



Panellinies Online

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΠΑ.Λ.



ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ • ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΑ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

Γ' ΕΠΑ.Λ. — Σημειώσεις μαθήματος

Θεωρία αυτούσια από το βιβλίο, τύποι και λυμένες ασκήσεις

ΠΕΡΙΕΧΕΙ

- Κεφάλαιο 1: Διαφορικός Λογισμός
6 ενότητες
- Κεφάλαιο 2: Στατιστική
7 ενότητες
- Τελική Επανάληψη
1 ενότητα

3

κεφάλαια

14

ενότητες

Γ'

τάξη ΕΠΑ.Λ.

panellinies.online

Δωρεάν σημειώσεις, θέματα και λύσεις για τις Πανελλαδικές

Έκδοση db53de

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Διαφορικός Λογισμός

- 1.1 Συναρτήσεις
- 1.2 Η έννοια της παραγώγου
- 1.3 Παράγωγος συνάρτησης
- 1.3 Κανόνες παραγωγισής
- 1.4 Εφαρμογές των παραγώγων
- Λυμένες Ασκήσεις Κεφ. 1

Κεφάλαιο 2: Στατιστική

- 2.1 Βασικές έννοιες
- 2.2 Πίνακες συχνότητας
- 2.2 Γραφικές παραστάσεις
- 2.2 Ομαδοποίηση — Ιστόγραμμα
- 2.3 Μέτρα θέσης
- 2.3 Μέτρα διασποράς
- Λυμένες Ασκήσεις Κεφ. 2

Τελική Επανάληψη

- Τύποι και ορισμοί

Κεφάλαιο 1: Διαφορικός Λογισμός

1.1 Συναρτήσεις

Τι εξετάζεται από την παράγραφο αυτή: ο ορισμός της συνάρτησης και του πεδίου ορισμού, οι πράξεις με συναρτήσεις, η γραφική παράσταση, η **μονοτονία** και τα **ακρότατα**, το **όριο** συνάρτησης με τις ιδιότητές του και η **συνέχεια**. Ο ορισμός της συνεχούς συνάρτησης έχει ζητηθεί αυτούσιος στο Θέμα Α το 2020 και το 2025, και ως πρόταση Σωστού/Λάθους το 2017.

Ορισμός συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Συνάρτηση

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B .

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο A , που λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το $\mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και στο εξής τις λέμε απλώς συναρτήσεις. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$ και διαβάζουμε « y ίσον f του x ». Το $f(x)$ λέγεται **τιμή** της f στο x . Το γράμμα x , που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A , ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Πεδίο ορισμού από τον τύπο

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $1 - x^2 \geq 0$, δηλαδή το διάστημα $\Delta = [-1, 1]$. η συνάρτηση $g(x) = \frac{3}{x - 2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{2\}$, δηλαδή το $\mathbb{R}$ χωρίς το 2. ενώ η συνάρτηση $h(x) = 3x - 1$ έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ΣΧΟΛΙΟ (βιβλίο). Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα x και y για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι $f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ και $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Πού χάνονται μονάδες: το πεδίο ορισμού θέλει ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς. Ρίζα $\Rightarrow$ υπόρριζο ≥ 0 . Κλάσμα $\Rightarrow$ παρονομαστής $\neq 0$. Κλάσμα με ρίζα στον παρονομαστή $\Rightarrow$ υπόρριζο > 0 (γνήσια). Λογάριθμος $\Rightarrow$ όρισμα > 0 .

Πράξεις με συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το **άθροισμα** $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η **διαφορά** $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το **γινόμενο** $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το **πηλίκο** $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x + 1$, τότε

$$S(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) = x^2 + x \text{ άθροισμα}$$

$$D(x) = (x^2 - 1) - (x + 1) = x^2 - x - 2 \text{ διαφορά}$$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 1) \text{ γινόμενο}$$

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1, \text{ όπου } x \neq -1 \text{ πηλίκο}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

Επομένως, ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f , μόνο όταν $y = f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης** της f .

$$f(x) = x$$

Η καμπύλη είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

$$f(x) = x^2$$

Η καμπύλη είναι μια παραβολή, με κορυφή την αρχή των αξόνων.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Η καμπύλη είναι μια υπερβολή. Υπάρχει διακοπή στο $x = 0$, γιατί το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει το μηδέν.

$$f(x) = e^x$$

Η καμπύλη είναι «πάνω» από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \ln x$$

Η καμπύλη είναι «δεξιά» του άξονα $y'y$, αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.

ημx και συνx

Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\eta x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π .

Μονοτονία — Ακρότατα συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Γνησίως αύξουσα — γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$, προκύπτει ότι για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $[0, \frac{\pi}{2}]$ με $x_1 < x_2$ είναι $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$: η $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Το ίδιο συμβαίνει και στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Όμως στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ είναι $\eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$, δηλαδή η $\eta\mu x$ είναι εκεί γνησίως φθίνουσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τοπικό μέγιστο — τοπικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

- **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 , και
- **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Για την $f(x) = \eta\mu x$ στο $[0, 2\pi]$ είναι $\eta\mu x \leq \eta\mu(\frac{\pi}{2}) = 1$ και $\eta\mu x \geq \eta\mu(\frac{3\pi}{2}) = -1$. Δηλαδή η συνάρτηση έχει **ολικό μέγιστο** (maximum) για $x = \frac{\pi}{2}$ και **ολικό ελάχιστο** (minimum) για $x = \frac{3\pi}{2}$.

Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι **μεγαλύτερο** από ένα τοπικό μέγιστο: τα «τοπικό» σημαίνει «σε μια περιοχή», όχι «σε όλο το πεδίο ορισμού».

Όριο συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

οπότε όταν $x \rightarrow 1$, τότε $f(x) = x + 1 \rightarrow 2$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 **όριο** (limit) 2 και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Προσοχή στη μορφή $\frac{0}{0}$. Όταν η αντικατάσταση δίνει $\frac{0}{0}$, το όριο δεν είναι μηδέν και δεν είναι απροσδιόριστο: **παραγοντοποιούμε** και απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα που μηδενίζεται. Αυτό ακριβώς ζητούν σχεδόν κάθε χρονιά τα ερωτήματα ορίου στα Θέματα Β, Γ και Δ.

Ιδιότητες των ορίων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

Ιδιότητα	Τι λέει
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$	όριο αθροίσματος
$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot l_1$	όριο πολλαπλασίου
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$	όριο γινομένου
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$	όριο πηλίκου (με $l_2 \neq 0$)
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = l_1^n$	όριο δύναμης
$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$	όριο ρίζας

Έτσι, για παράδειγμα, για την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 9$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 9 = 4 + 6 - 9 = 1$$

Συνέχεια συνάρτησης

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 9$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $x_0 = 2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΖΗΤΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2020, 2025)

Συνεχής συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις — πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών — είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει, για παράδειγμα, $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \epsilon\phi x_0$ (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0$).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (σχολικό βιβλίο, σελ. 16)

Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 5}$

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

ii) **Απευθείας αντικατάσταση**

Ο παρονομαστής δε μηδενίζεται στο 5, οπότε το όριο υπολογίζεται με αντικατάσταση:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x + 5}{4x} = \frac{3 \cdot 5 + 5}{4 \cdot 5} = \frac{20}{20} = 1$$

iii) **Όριο αθροίσματος και ρίζας**

Και τα δύο όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε εφαρμόζουμε την ιδιότητα του αθροίσματος και της ρίζας:

$$\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 1}) = \sqrt{8 - 4} + \sqrt{8 + 1} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

iv) **Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$** Η αντικατάσταση δίνει $\frac{0}{0}$. Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή ως διαφορά τετραγώνων και απλοποιούμε:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6$$

Απάντηση: i) 1 ii) 5 iii) -6.

Πανελλαδικές 2021 — Θέματα B1, B2, B3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.**B1. Αν η****γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α .****B2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$**

$$= \frac{f(x)}{x^2 - 1} \quad \text{B3. Για } \alpha = 3, \text{ να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 1} g(x).$$

B1 — το σημείο τομής με τον $x'x$ Ένα σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0. Αφού η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1, το σημείο $(1, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση, δηλαδή $f(1) = 0$:

$$1^2 - \alpha \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

B2 — πεδίο ορισμού της g Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = x^2 - 3x + 2$, που ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Άρα ο μόνος περιορισμός έρχεται από τον παρονομαστή:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$$

Πεδίο ορισμού: $A_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, δηλαδή $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.**B3 — το όριο στο 1 (μορφή $\frac{0}{0}$)**Η αντικατάσταση δίνει $\frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$, απροσδιόριστη μορφή. Παραγοντοποιούμε: τοτριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 8 = 1$ και ρίζες $x = 1$, $x = 2$, άρα $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Επίσης $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Για $x \neq 1$ απλοποιούμε τον παράγοντα $(x - 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Απάντηση: $\alpha = 3$, $A_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\frac{1}{2}$.

1.2 Η έννοια της παραγώγου

Τι εξετάζεται: από πού γεννιέται η παράγωγος (εφαπτομένη καμπύλης και στιγμιαία ταχύτητα), ο **ορισμός της παραγώγου στο x_0** — ζητήθηκε αυτούσιος στο Θέμα Α το 2018 και το 2023 — η ερμηνεία της ως **ρυθμός μεταβολής** και ως **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης**, καθώς και το σχόλιο ότι η $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Εφαπτομένη καμπύλης

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A είναι η ευθεία ε που είναι κάθετη στην ακτίνα OA στο σημείο A . Αν το M κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει το A , η τέμνουσα AM τείνει να γίνει κάθετη στην OA , δηλαδή τείνει να συμπίσει με την εφαπτομένη ε . Θα μπορούσαμε επομένως να ορίσουμε ως εφαπτομένη του κύκλου στο A **την οριακή θέση της τέμνουσας AM** , καθώς το M τείνει να συμπίσει με το A .

Τον ισοδύναμο αυτό ορισμό τον χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C . Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της C με $h \neq 0$.

Καθώς το M κινούμενο πάνω στη C πλησιάζει το A , όταν δηλαδή $h \rightarrow 0$, τότε η ευθεία AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε , η οποία λέγεται **εφαπτομένη** (tangent) της C στο A . Ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{M\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο A θα είναι

$$\varepsilon_{\varphi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Στιγμιαία ταχύτητα

Όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά από τον Γαλιλαίο, το διάστημα S που διανύεται σε χρόνο t sec από ένα σώμα που αφήνεται να πέσει στο κενό εκφράζεται από τον τύπο $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$, όπου $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η μέση ταχύτητα στο διάστημα από $t = 5$ έως $t = 5,1$ είναι

$$v_{\mu} = \frac{S(5,1) - S(5)}{0,1} = \frac{4,905 \cdot (5,1)^2 - 4,905 \cdot 5^2}{0,1} = 49,5405 \text{ m/s}$$

Χρονικό διάστημα	Μέση ταχύτητα (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,955
$5 \leq t \leq 5,1$	49,5405
$5 \leq t \leq 5,05$	49,29525
$5 \leq t \leq 5,01$	49,09905
$5 \leq t \leq 5,001$	49,054905
$5 \leq t \leq 5,0001$	49,050491
$5 \leq t \leq 5,00001$	49,050049

Φαίνεται ότι καθώς μικραίνει το χρονικό διάστημα, η μέση ταχύτητα πλησιάζει ολοένα και περισσότερο στην τιμή 49,05 m/s. Η οριακή αυτή τιμή ορίζεται ως η **στιγμιαία ταχύτητα** του σώματος όταν $t = 5$ s.

Γενικά, για ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση, η αύξηση του διαστήματος σε χρόνο h είναι $\Delta S = \frac{1}{2}g(2t_0h + h^2)$ και η μέση ταχύτητα από t_0 σε $t_0 + h$ είναι $u = \frac{\Delta S}{h} = gt_0 + \frac{1}{2}gh$. Καθώς ελαττώνεται το h πλησιάζοντας το μηδέν, χωρίς ποτέ να γίνεται ίσο με το μηδέν, η μέση ταχύτητα πλησιάζει όλο και περισσότερο στο gt_0 . Επομένως

$$u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{h} = g \cdot t_0$$

Προφανώς όταν $t_0 = 5$, τότε $u = 9,81 \cdot 5 = 49,05$ m/s — η τιμή που προσεγγίσαμε αριθμητικά.

Για κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με θέση $x = f(t)$, η μέση ταχύτητα στο διάστημα h είναι $u = \frac{\Delta x}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ και η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Παράγωγος της f στο $x = x_0$

Και τα δύο προηγούμενα προβλήματα — το πρώτο στη Γεωμετρία και το δεύτερο στη Μηχανική — οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Υπάρχουν όμως και πολλά άλλα προβλήματα διαφορετικής φύσεως, όπως ο ορισμός της έντασης ενός ρεύματος, της ταχύτητας μιας χημικής αντίδρασης ή του οριακού κόστους στην Οικονομία, που οδηγούν στο ίδιο όριο.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΖΗΤΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2018, 2023)

Παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 — παράγωγος στο x_0

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι **πραγματικός αριθμός**, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** , συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται « f τονούμενο του x_0 ». Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Παράδειγμα βιβλίου: η παράγωγος της $f(x) = 3x^2$ στο 4**Βήμα 1 — η διαφορά $f(4 + h) - f(4)$**

$$f(4 + h) - f(4) = 3(4 + h)^2 - 3 \cdot 4^2 = 3(16 + 8h + h^2) - 3 \cdot 16 = 3(8h + h^2)$$

Βήμα 2 — το πηλίκο, για $h \neq 0$

$$\frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \frac{3h(8 + h)}{h} = 24 + 3h$$

Βήμα 3 — το όριο για $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (24 + 3h) = 24$$

$$\text{Άρα } f'(4) = 24.$$

Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής**ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2025)****Ρυθμός μεταβολής**

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον **ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

Έτσι, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε παραπάνω:

- Ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.
- Η **ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 : $v(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

Ο ΤΥΠΟΣ ΠΟΥ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΟ**Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$**

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Ισοδύναμα $y = \lambda \cdot x + \beta$ με $\lambda = f'(x_0)$ και β από την απαίτηση να διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$.

Παράλληλη στον άξονα $x'x$ σημαίνει συντελεστής διεύθυνσης 0, άρα $f'(x_0) = 0$ — αυτό ακριβώς ζητήθηκε το 2018 (Γ1), το 2023 (Β2) και το 2020 (Δ3). **Παράλληλη στην ευθεία $y = \lambda x + \beta$** σημαίνει $f'(x_0) = \lambda$ (2017, Δ3).

ΣΧΟΛΙΟ: συναρτήσεις χωρίς παράγωγο

ΣΧΟΛΙΟ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2020, 2024)**Η $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$**

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $x_0 = 0$. Διότι όταν $h < 0$, έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

ενώ όταν $h > 0$, έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

που σημαίνει ότι **δεν υπάρχει** το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$.

Γεωμετρικά: η γραφική παράσταση της $|x|$ έχει «γωνία» στο 0 — δύο διαφορετικές κλίσεις εκατέρωθεν, άρα καμία μοναδική εφαπτομένη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 (σχολικό βιβλίο, σελ. 24)

Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t) = t^2 + t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα διαστήματα i) $[0, 2]$ ii) $[0, 1]$ iii) $[0, 0,5]$ iv) $[0, 0,1]$.

β) Να βρεθεί η ταχύτητα όταν $t = 0$.

α) Μέσες ταχύτητες

Είναι $x(0) = 0$, $x(2) = 6$, $x(1) = 2$, $x(0,5) = 0,75$, $x(0,1) = 0,11$.

$$\text{i) } v = \frac{x(2) - x(0)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s} \quad \text{ii) } v = \frac{x(1) - x(0)}{1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ m/s}$$

$$\text{iii) } v = \frac{x(0,5) - x(0)}{0,5} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5 \text{ m/s} \quad \text{iv) } v = \frac{x(0,1) - x(0)}{0,1} = \frac{0,11}{0,1} = 1,1 \text{ m/s}$$

β) Ταχύτητα για $t = 0$

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(0+h) - x(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1 \text{ m/s}$$

Οι μέσες ταχύτητες $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1,5 \rightarrow 1,1$ πλησιάζουν την τιμή **1**: η στιγμιαία ταχύτητα είναι η οριακή τιμή των μέσων ταχυτήτων. Η εφαπτομένη στο $t = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 και, αφού περνά από την αρχή, είναι η $x = t$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 (σχολικό βιβλίο, σελ. 25)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x}$. i) Να βρεθεί η $f'(3)$. ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $(3, f(3))$.

i) Με τον ορισμό

$$f(3+h) - f(3) = \frac{3}{3+h} - \frac{3}{3} = \frac{3 - (3+h)}{3+h} = -\frac{h}{3+h}$$

και για $h \neq 0$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = -\frac{h}{h(3+h)} = -\frac{1}{3+h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{3+h} \right] = -\frac{1}{3}$$

ii) Η εφαπτομένη

Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(3) = -\frac{1}{3}$, άρα $y = -\frac{x}{3} + \beta$. Επειδή το σημείο $(3, f(3)) = (3, 1)$ ανήκει στην εφαπτομένη:

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow 1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -\frac{x}{3} + 2$.

1.3 Παράγωγος συνάρτησης — ορισμός και βασικές παράγωγοι

Τι εξετάζεται: ο ορισμός της **συνάρτησης πρώτης παραγώγου** (Θέμα Α, 2026), η **δεύτερη παράγωγος**, ταχύτητα και επιτάχυνση, και οι **αποδείξεις** των παραγώγων της σταθερής και της ταυτοτικής συνάρτησης και της x^2 . Οι αποδείξεις αυτές είναι το πιο συχνό ερώτημα Α1: ζητήθηκαν το 2019, το 2020, το 2021 και το 2022.

Ορισμός παραγώγου

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΖΗΤΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2026)

Συνάρτηση (πρώτη) παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **(πρώτη) παράγωγος** (derivative) της f και συμβολίζεται με f' .

Για παράδειγμα, αν $f(x) = 3x^2$, τότε έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = 3(x+h)^2 - 3x^2 = 3(x^2 + 2xh + h^2) - 3x^2 = 3(2xh + h^2)$$

και για $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h(2x+h)}{h} = 6x + 3h$$

$$\text{Επομένως } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x.$$

Έτσι, η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι ίση με την **τιμή της συνάρτησης παραγώγου** στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, η παράγωγος της $f(x) = 3x^2$ στο $x_0 = 4$ είναι ίση με την τιμή της $f'(x) = 6x$ στο $x_0 = 4$, δηλαδή $f'(4) = 6 \cdot 4 = 24$ — το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον ορισμό στην §1.2.

Δεύτερη παράγωγος — ταχύτητα και επιτάχυνση

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δεύτερη παράγωγος

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f'' .

Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $v(t) = x'(t)$. Αν η συνάρτηση v είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή

$$a(t) = v'(t) \text{ ή ισοδύναμα } a(t) = x''(t)$$

Παραγωγή βασικών συναρτήσεων

Έως τώρα η παραγωγή μιας συνάρτησης f γινόταν με τη βοήθεια του τύπου $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (2021, Α2)

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

$$\text{Άρα } (c)' = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ (2019, Α1)

Έχουμε

$$f(x + h) - f(x) = (x + h) - x = h$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\text{Άρα } (x)' = 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — η παράγωγος της $f(x) = x^2$ (2020, Α4 · 2022, Α1)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h(2x + h)$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$$\text{Άρα } (x^2)' = 2x, \text{ για κάθε } x \text{ στο σύνολο } \mathbb{R} \text{ των πραγματικών αριθμών.}$$

Η παράγωγος της $f(x) = x^p$

Αποδεικνύεται ότι $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, όπου p φυσικός. Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι **ρητός** αριθμός. Για παράδειγμα:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ΓΕΝΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}, \text{ όπου } p \text{ ρητός αριθμός}$$

Κλασικό λάθος Σ/Λ (2023, δ): $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, όχι $\frac{2}{\sqrt{x}}$. Και (2019, α): $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, με το μείον.

Η παράγωγος του ημx και του συνx

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$. Αν λάβουμε υπόψη ότι η τιμή της $f'(x)$ σε ένα σημείο $x = x_0$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, μπορούμε να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά τη γραφική παράσταση της f' . Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f' μοιάζει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Το πιο συχνό λάθος Σ/Λ (2018, β): η παράγωγος του συνημιτόνου έχει **μείον**: $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$. Ενώ $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ χωρίς μείον (2024, γ — Σωστό).

Η παράγωγος του e^x και του $\ln x$

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e , αποδεικνύεται ότι

$$(e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1.3 Κανόνες παραγώγισης — σύνθετη συνάρτηση

Τι εξετάζεται: οι αποδείξεις των κανόνων $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ (Θέμα Α 2023) και $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (Θέμα Α 2017, 2024), οι κανόνες γινομένου και πηλίκου, η **παράγωγος σύνθετης συνάρτησης** και ο συγκεντρωτικός πίνακας τύπων που ζητείται για συμπλήρωση σχεδόν κάθε χρονιά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — η παράγωγος της $cf(x)$ (2023, Α1)

Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$. Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c \cdot (f(x+h) - f(x))$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}) = c \cdot f'(x)$$

$$\text{Άρα } (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Για παράδειγμα:

$$(3x^5)' = 3 \cdot (x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4 \quad \left(\frac{4}{x}\right)' = 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2} \quad (6 \ln x)' = 6 \cdot (\ln x)' = \frac{6}{x}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — η παράγωγος του αθροίσματος $f(x) + g(x)$ (2017, A1 · 2024, A1)

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

$$\text{Άρα } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Για παράδειγμα:

$$(x^4 + 3x)' = (x^4)' + (3x)' = 4x^3 + 3$$

$$(x^2 - x + \frac{1}{x})' = (x^2)' - (x)' + (\frac{1}{x})' = 2x - 1 - \frac{1}{x^2}$$

Παράγωγος γινομένου και πηλίκου

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγωγίσης:

ΚΑΝΟΝΕΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Πρόταση Σ/Λ 2026 (δ) — Λάθος: ο παρονομαστής στον κανόνα του πηλίκου είναι $(g(x))^2$, όχι $g(x)$. Στο θέμα του 2026 δόθηκε χωρίς το τετράγωνο, γι' αυτό η πρόταση χαρακτηρίζεται **Λάθος**.

Για παράδειγμα:

$$(x \cdot \eta\mu x)' = (x)' \cdot \eta\mu x + x \cdot (\eta\mu x)' = \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$\left(\frac{x+1}{x^2} \right)' = \frac{(x+1)' \cdot x^2 - (x+1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3}$$

Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Γνωρίζουμε ήδη πώς παραγωγίζονται οι συναρτήσεις x^y , $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, e^x και $\ln x$. Επίσης, με τη βοήθεια των κανόνων παραγωγίσης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου μπορούμε να παραγωγίσουμε και πολύπλοκότερες συναρτήσεις. Πώς όμως θα παραγωγίσουμε μια συνάρτηση όπως η $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

Παρατηρούμε ότι η $F(x)$ προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x}$ θέσουμε όπου x το $g(x) = x^2 + 1$. Είναι, δηλαδή, $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} = f(g(x))$. Γι' αυτό η συνάρτηση F λέγεται **σύνθεση** της g με την f .

ΚΑΝΟΝΑΣ ΒΙΒΛΙΟΥ – ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2019)**Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης (αλυσωτή παραγωγή)**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g .

Επομένως:

$$((x^3 + 1)^3)' = 3(x^3 + 1)^2 \cdot (x^3 + 1)' = 3(x^3 + 1)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2(x^3 + 1)^2$$

Επίσης, επειδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, έχουμε:

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right] \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\eta\mu(2x + 1))' = \sigma\upsilon\nu(2x + 1) \cdot (2x + 1)' = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2x + 1)$$

Ο τύπος $(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ είναι ακριβώς αυτό που ζητήθηκε το **2018 (Δ1)** για την $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018$ και το **2019 (Γ1)** για την $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + 10$.

Συγκεντρωτικός πίνακας τύπων και κανόνων παραγωγίσης

Βασικοί τύποι	Κανόνες παραγωγίσης
$(c)' = 0$	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
$(x)' = 1$	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 (σχολικό βιβλίο, σελ. 33)

Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων: i) $f(x) = \varepsilon\phi x$ ii) $f(x) = \eta\mu^2 3x$.

i) Με τον κανόνα του πηλίκου

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ii) Διπλή εφαρμογή του κανόνα της σύνθετης

Η $\eta\mu^2 3x$ είναι η $(\eta\mu 3x)^2$: πρώτα παραγωγίζουμε τη δύναμη, μετά το ημίτονο, μετά το $3x$.

$$f'(x) = ((\eta\mu 3x)^2)' = 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot (\eta\mu 3x)' = 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x \cdot (3x)' = 3 \cdot 2 \cdot \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x$$

Με τη σχέση $\eta\mu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = 1$ για $\alpha = 3x$:

$$f'(x) = 3 \cdot \eta\mu(2 \cdot 3x) = 3 \cdot \eta\mu 6x$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 (σχολικό βιβλίο, σελ. 34) — ευθύγραμμη κίνηση

Η θέση ενός υλικού σημείου δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, με το t σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα σε χρόνο t . ii) Ποια είναι σε 2 s και ποια σε 4 s; iii) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο; iv) Πότε κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση; v) Ποιο είναι το ολικό διάστημα στα πρώτα 5 s;

i) Η ταχύτητα είναι η παράγωγος της θέσης

$$v(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9$$

ii) Τιμές

$$v(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \text{ m/s} \quad v(4) = 3 \cdot 16 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \text{ m/s}$$

iii) Στιγμιαία ακίνητο: $v(t) = 0$

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ή } t = 3$$

Άρα το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

iv) Πρόσημο της ταχύτητας

$$3t^2 - 12t + 9 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 > 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 3) > 0 \Leftrightarrow t < 1 \text{ ή } t > 3$$

Άρα κινείται στη **θετική** κατεύθυνση για $t < 1$ και $t > 3$, και στην **αρνητική** όταν $1 < t < 3$.

v) Ολικό διάστημα σε 5 s

Επειδή αλλάζει κατεύθυνση, το διάστημα υπολογίζεται κατά τμήματα με **απόλυτες** μετατοπίσεις. Είναι $x(0) = 0$, $x(1) = 4$, $x(3) = 0$, $x(5) = 20$.

$$S_1 = |x(1) - x(0)| = 4 \text{ m} \quad S_2 = |x(3) - x(1)| = 4 \text{ m} \quad S_3 = |x(5) - x(3)| = 20 \text{ m}$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28 \text{ m}$$

1.4 Εφαρμογές των παραγώγων — μονοτονία και ακρότατα

Τι εξετάζεται: το **κριτήριο της πρώτης παραγώγου** — για τη μονοτονία και για τα ακρότατα — και η εφαρμογή του σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Είναι η καρδιά του Θέματος Β/Γ/Δ: «να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων» ζητήθηκε το 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025 και 2026.

Εκτός εξεταστέας ύλης: το **κριτήριο της δεύτερης παραγώγου** (υποπαράγραφος «Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου» του βιβλίου) **δεν εξετάζεται**. Μη γράψεις « $f''(x_0) < 0$ άρα μέγιστο» στις Πανελλαδικές: η αιτιολόγηση γίνεται αποκλειστικά με τον **πίνακα προσήμου της f'** . Η δεύτερη παράγωγος εξακολουθεί όμως να υπολογίζεται όπου ζητείται ρητά (π.χ. 2020 Γ2, 2025 Δ4).

Από πού ξεκινά το κριτήριο

Με τη βοήθεια της παραγώγου μπορούμε να διατυπώσουμε μια γενική μέθοδο προσδιορισμού της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να φθάσει ένα σώμα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $u_0 = 20$ m/s. Αν $g = 10$ m/s², το ύψος h ύστερα από t δευτερόλεπτα θα είναι

$$h(t) = 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t$$

Η γραφική παράσταση είναι παραβολή που τέμνει τον άξονα των t στα $t = 0$ και $t = 4$, παρουσιάζει μέγιστο για $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2$ ίσο με $h(2) = 20$, και είναι γνησίως αύξουσα για $t < 2$ και γνησίως φθίνουσα για $t > 2$.

Λύνοντας την ανίσωση $h'(t) > 0$ για $h'(t) = -10t + 20$, βρίσκουμε ότι **αριστερά του 2**, όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η παράγωγός της είναι **θετική**, ενώ **δεξιά του 2**, όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, η παράγωγός της είναι **αρνητική**.

t	0		2		4
$h'(t)$		+	0	−	
$h(t)$		↗	μέγιστο 20	↘	

Το κριτήριο της πρώτης παραγώγου — μονοτονία

ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2018, 2022, 2025)

Μονοτονία και πρόσημο της παραγώγου

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .

Η παγίδα που επαναλαμβάνεται: το 2018 (ε) και το 2025 (ε) δόθηκε η πρόταση «αν $f'(x) < 0$... τότε η f είναι γνησίως αύξουσα». Είναι **Λάθος**: αρνητική παράγωγος σημαίνει γνησίως **φθίνουσα**. Το 2022 (β) δόθηκε η σωστή εκδοχή με $f'(x) > 0 \implies$ γνησίως αύξουσα.

Το κριτήριο της πρώτης παραγώγου — ακρότατα

Παρατηρούμε ότι στο σημείο $t = 2$, όπου η h παρουσιάζει μέγιστο, η h' μηδενίζεται, ενώ εκατέρωθεν του $t = 2$ η h' αλλάζει πρόσημο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2026)

Κριτήριο 1ης παραγώγου για ακρότατα

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ **μέγιστο**.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ **ελάχιστο**.

ΣΧΟΛΙΟ ΒΙΒΛΙΟΥ

Όταν δεν υπάρχουν ακρότατα

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η παράγωγός της f' **διατηρεί πρόσημο** εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και **δεν παρουσιάζει ακρότατα** στο διάστημα αυτό.

Το σχόλιο αυτό είναι ακριβώς η απάντηση στο **2019 Δ4**: «να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα». Ζητάμε η f' να μην αλλάζει πρόσημο, δηλαδή η διακρίνουσα της f' να είναι $\Delta \leq 0$.

Η μεθοδολογία βήμα-βήμα

- 1. Πεδίο ορισμού** Γράφουμε το A της f — η μελέτη γίνεται μέσα σε αυτό.
- 2. Παράγωγος** Υπολογίζουμε την $f'(x)$ με τους κανόνες παραγώγισης.
- 3. Ρίζες** Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- 4. Πρόσημο** Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0$ και φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμου.
- 5. Συμπέρασμα** Μονοτονία από το πρόσημο· ακρότατα εκεί που η f' αλλάζει πρόσημο.
- 6. Τιμή ακροτάτου** Αντικαθιστούμε τη θέση x_0 στην αρχική f , όχι στην f' .

Η διάκριση «θέση — είδος — τιμή» δίνει μονάδες. Η θέση είναι το x_0 , το είδος είναι «τοπικό μέγιστο» ή «τοπικό ελάχιστο», η τιμή είναι το $f(x_0)$. Τα θέματα ζητούν συχνά και τα τρία ξεχωριστά (π.χ. 2017 Δ2, 2020 Γ3, 2024 Β2, 2026 Β2).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 (σχολικό βιβλίο, σελ. 41) — ακρότατα του τριωνύμου

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

Παράγωγος και ρίζα της

$$f'(x) = (ax^2 + bx + \gamma)' = 2ax + \beta$$

$$f'(x) = 0 \iff 2ax + \beta = 0 \iff x = -\frac{\beta}{2a}$$

$$f'(x) > 0 \iff 2ax + \beta > 0 \iff ax > -\frac{\beta}{2}$$

Περίπτωση $a > 0$

$$\text{Τότε } f'(x) > 0 \text{ για } x > -\frac{\beta}{2a} \text{ και } f'(x) < 0 \text{ για } x < -\frac{\beta}{2a}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+	
$f(x)$		↘	ελάχιστο	↗	

Περίπτωση $\alpha < 0$

Τότε $f'(x) > 0$ για $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x) < 0$ για $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$:

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$		↗	μέγιστο	↘	

Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει **ελάχιστο αν $\alpha > 0$** και **μέγιστο αν $\alpha < 0$** . Η τιμή του ακροτάτου είναι $f(-\frac{\beta}{2\alpha}) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 (σχολικό βιβλίο, σελ. 41) — πληθυσμός βακτηριδίων

Ένας πληθυσμός 1000 βακτηριδίων εισάγεται σε ένα θρεπτικό μέσον και αναπτύσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες. Σε πόσο χρόνο ο πληθυσμός θα είναι μέγιστος και ποιος θα είναι;

Παράγωγος με τον κανόνα του πηλίκου

$$p'(t) = \frac{1000(100 + t^2) - 1000t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{1000(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$$

Ρίζες

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000(100 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \text{ ή } t = -10$$

Επειδή ο χρόνος t είναι θετικός, η ρίζα $t = -10$ απορρίπτεται.

Πρόσημο

Ο παρονομαστής $(100 + t^2)^2$ είναι πάντα θετικός, οπότε το πρόσημο το καθορίζει ο αριθμητής:

$$p'(t) > 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 > 0 \Leftrightarrow (t + 10)(t - 10) < 0 \Leftrightarrow -10 < t < 10$$

Επομένως $p'(t) > 0$ για $0 < t < 10$. Έχουμε λοιπόν $p'(10) = 0$, $p'(t) > 0$ στο $(0, 10)$ και $p'(t) < 0$ στο $(10, +\infty)$.

Συμπέρασμα και τιμή

$$p(10) = 1000 + 1000 \cdot \frac{10}{100 + 10^2} = 1000 + \frac{10000}{200} = 1050$$

Ύστερα από **10 ώρες** θα παρουσιαστεί ο μέγιστος πληθυσμός βακτηριδίων, που θα είναι ίσος με **1050**.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 (σχολικό βιβλίο, σελ. 43) — το παράθυρο με το μέγιστο εμβαδόν

Ένα παράθυρο αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει, ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερο φως.

Βήμα 1 — μοντελοποίηση

Έστω x η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε $AB = ΓΔ = 2x$. Αν $AD = ΒΓ = y$, από την περίμετρο έχουμε:

$$y + y + 2x + \frac{1}{2} \cdot 2\pi x = 30 \Leftrightarrow 2y = 30 - 2x - \pi x \quad (1)$$

Βήμα 2 — το εμβαδόν ως συνάρτηση του x

Η μεγαλύτερη ποσότητα φωτός διέρχεται όταν το εμβαδόν είναι μέγιστο:

$$E = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = x(30 - 2x - \pi x) + \frac{1}{2}\pi x^2 = 30x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$$

$$E(x) = 30x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$$

Βήμα 3 — παράγωγος και κρίσιμο σημείο

$$E'(x) = 30 - (4 + \pi)x \quad E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30}{4 + \pi}$$

Βήμα 4 — πίνακας προσήμου (κριτήριο 1ης παραγώγου)

Ο συντελεστής $4 + \pi$ είναι θετικός, οπότε η E' είναι γνησίως φθίνουσα πρωτοβάθμια: θετική αριστερά της ρίζας, αρνητική δεξιά της.

x	0		$\frac{30}{4 + \pi}$		
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗	μέγιστο	↘	

Άρα για $x = \frac{30}{4 + \pi}$ η συνάρτηση έχει τη μέγιστη τιμή της. Από την (1):

$$2y = 30 - (2 + \pi) \cdot \frac{30}{4 + \pi} = \frac{60}{4 + \pi} \quad \text{και επομένως} \quad y = \frac{30}{4 + \pi}$$

Άρα για $x = y = \frac{30}{4 + \pi} \approx 4,2$ m, το παράθυρο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Το βιβλίο αιτιολογεί εδώ με $E''(x) = -(4 + \pi) < 0$. Επειδή το κριτήριο της 2ης παραγώγου είναι **εκτός ύλης**, στις Πανελλαδικές η αιτιολόγηση γράφεται με τον πίνακα προσήμου της E' , όπως παραπάνω.

Πανελλαδικές 2026 — Θέμα Β (πλήρης μελέτη)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. **B2.** Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

B1 — παράγωγος

$$f'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' - (x^2)' - (3x)' + (1)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

B2 — ρίζες της f'

$$\Delta \text{ διακρίνουσα } \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4:$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει θετικό συντελεστή στο x^2 , άρα είναι θετικό εκτός των ριζών και αρνητικό μεταξύ τους.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	τοπ. μέγιστο	↘	τοπ. ελάχιστο	↗	

Συμπέρασμα μονοτονίας

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Τιμές των ακροτάτων

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση $x = -1$ με τιμή $f(-1) = \frac{8}{3}$ και **τοπικό ελάχιστο** στη θέση $x = 3$ με τιμή $f(3) = -8$.

Λυμένες Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

Πέντε ολοκληρωμένες ασκήσεις από πραγματικά θέματα Πανελλαδικών, λυμένες με τη μέθοδο του σχολικού βιβλίου. Καλύπτουν όλους τους τύπους που εμφανίζονται στα Θέματα Β, Γ και Δ:

μονοτονία και ακρότατα, εφαπτομένη, ρυθμός μεταβολής, όρια μορφής $\frac{0}{0}$ και προβλήματα βελτιστοποίησης.

Πανελλαδικές 2017 — Θέμα Δ (Δ1, Δ2, Δ3)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της f .

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Δ1 — παράγωγος και πρόσημο

Η f είναι πολυωνυμική, άρα παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει **αρνητικό** συντελεστή στο x^2 , άρα είναι θετικό μεταξύ των ριζών:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	τοπ. ελάχιστο	↗	τοπ. μέγιστο	↘	

Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 1]$, **γνησίως αύξουσα** στο $[1, 3]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[3, +\infty)$.

Δ2 — θέσεις, είδος και τιμές των ακροτάτων

Στο $x = 1$ η f' αλλάζει από αρνητική σε θετική, άρα τοπικό **ελάχιστο**. Στο $x = 3$ αλλάζει από θετική σε αρνητική, άρα τοπικό **μέγιστο**.

$$f(1) = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 - 9 + 1 = -9 + 18 - 9 + 1 = 1$$

Τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$ με τιμή $f(1) = -\frac{1}{3}$. **Τοπικό μέγιστο** στη θέση $x = 3$ με τιμή $f(3) = 1$.

Δ3 — παραλληλία εφαπτομένης με ευθεία

Η ευθεία $y = x + 2017$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$. Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, άρα ζητάμε $f'(x_0) = 1$:

$$-x_0^2 + 4x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

$$f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 6 + 1 = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}$$

Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(2, \frac{1}{3})$.

Πανελλαδικές 2018 — Θέμα Γ (Γ1, Γ2, Γ3)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Γ1 — παράλληλη στον $x'x$ σημαίνει μηδενική κλίση

$$f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$$

Ο άξονας $x'x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 0, άρα:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Γ2 — ελάχιστο του ρυθμού μεταβολής

Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x είναι η ίδια η $f'(x)$. Για $\kappa = 1$:

$$g(x) = f'(x) = 6x^2 - 6x$$

Ζητάμε το ελάχιστο της g , οπότε παραγωγίζουμε ξανά:

$$g'(x) = f''(x) = 12x - 6 \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x) = f''(x)$		—	0	+	
$g(x) = f'(x)$		↘	ελάχιστο	↗	

Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$, με ελάχιστη τιμή $f'(\frac{1}{2}) = 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 = -\frac{3}{2}$.

Γ3 – εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f'

Προσοχή: η εφαπτομένη ζητείται για την f' , όχι για την f . Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης είναι η $(f')' = f''$.

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 6 + 6 = 12$$

$$f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(-1, 12)$:

$$y - 12 = -18 \cdot (x - (-1)) \Leftrightarrow y - 12 = -18x - 18$$

$$y = -18x - 6$$

Πανελλαδικές 2018 – Θέμα Δ (Δ1, Δ2, Δ3)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) \cdot f'(x) - 2x}{x^2}$.

Δ1 – παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Είναι $x^2 + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$. Με τον

$$\text{κανόνα } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}:$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} + 0 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Δ2 – μονοτονία και ακρότατο

Ο παρονομαστής $\sqrt{x^2 + 4}$ είναι πάντα θετικός, άρα το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο του x :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$		↘	ελάχιστο	↗	

$$f(0) = \sqrt{4} + 2018 = 2 + 2018 = 2020$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει **ελάχιστο** στη θέση $x = 0$ με τιμή $f(0) = 2020$. (Επειδή το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f' , το ελάχιστο είναι **ολικό**.)

Δ3 – όριο με πολλαπλασιασμό επί τη συζυγή παράσταση

Αντικαθιστούμε την $f'(x)$ από το Δ1 και απλοποιούμε τον αριθμητή:

$$(x^2 + 4) \cdot f'(x) = (x^2 + 4) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = x \cdot \sqrt{x^2 + 4}$$

$$A = \frac{x\sqrt{x^2 + 4} - 2x}{x^2} = \frac{x(\sqrt{x^2 + 4} - 2)}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} \quad (x \neq 0)$$

Η αντικατάσταση δίνει $\frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+4}+2$:

$$A = \frac{(x^2+4)-4}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} A = \frac{0}{\sqrt{4}+2} = \frac{0}{4} = 0$$

Το ζητούμενο όριο είναι 0.

Πανελλαδικές 2020 — Θέμα Δ (Δ1, Δ2, Δ3, Δ4)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) =$

$$40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2).$$

Δ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0}$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

Δ3. Να

δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 1$.

Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x, 1)$ της ευθείας $y = 1$ με $x > 0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x, 1)$ και $O(0, 0)$ ως προς x , όταν $x = 1$.

Δ1 — αλυσωτή παραγωγή

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) \\ &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2) \end{aligned}$$

Δ2 — το όριο είναι ο ορισμός της παραγώγου στο -2

Το ζητούμενο όριο είναι εξ ορισμού η $f'(-2)$:

$$f'(-2) = 40 \cdot ((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{19} \cdot (-2 + 2) = 40 \cdot 1^{19} \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 0$$

Δ3 — η οριζόντια εφαπτομένη

Παράλληλη στον $x'x$ σημαίνει $f'(x_0) = 0$:

$$40(x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19}(x_0 + 2) = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ και θετικό συντελεστή στο x^2 , άρα είναι **πάντα θετικό** και δε μηδενίζεται ποτέ. Απομένει:

$$x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(-2) = ((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{20} = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1$$

Η εφαπτομένη στο $(-2, 1)$ με κλίση 0 είναι $y - 1 = 0 \cdot (x + 2)$.

$$y = 1$$

Δ4 — ρυθμός μεταβολής απόστασης

Η απόσταση των $A(x, 1)$ και $O(0, 0)$ είναι

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{x^2+1}, \quad x > 0$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ως προς x είναι η $d'(x)$:

$$d'(x) = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$d'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ μονάδες μήκους ανά μονάδα του x .

Πανελλαδικές 2021 — Θέμα Δ (πρόβλημα βελτιστοποίησης)

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 80 m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της E .

Δ2. Να μελετήσετε την $E(x)$ ως προς τη μονοτονία.

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β με περίμετρο 80 m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5$ m και $x_B = 34,2$ m. Ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Δ1 — από την περίμετρο στο εμβαδόν

$$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$$

$$E(x) = x \cdot y = x(40 - x) = -x^2 + 40x$$

Οι διαστάσεις είναι μήκη, άρα πρέπει $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 40 - x > 0 \Leftrightarrow x < 40$.

Πεδίο ορισμού: $(0, 40)$.

Δ2 — μονοτονία

$$E'(x) = -2x + 40 \quad E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 40 > 0 \Leftrightarrow x < 20$$

x	0		20		40
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗	μέγιστο	↘	

Η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 20]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[20, 40)$.

Δ3 — μέγιστο εμβαδόν

$$E(20) = -400 + 800 = 400 \text{ m}^2$$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 20$ m και η μέγιστη τιμή του είναι **400 m²**. Τότε $y = 40 - 20 = 20$, δηλαδή το οικόπεδο είναι **τετράγωνο**.

Δ4 — σύγκριση χωρίς υπολογισμό εμβαδών

Και τα δύο μήκη ανήκουν στο διάστημα $[20, 40)$, όπου η E είναι **γνησίως φθίνουσα**. Επειδή $29,5 < 34,2$, από τη μονοτονία προκύπτει:

$$E(29,5) > E(34,2)$$

Το **οικόπεδο Α** (με μήκος 29,5 m) έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Η αιτιολόγηση με τη μονοτονία είναι αυτή που βαθμολογείται — όχι ο αριθμητικός υπολογισμός των δύο εμβαδών.

Κεφάλαιο 2: Στατιστική

2.1 Βασικές έννοιες

Τι εξετάζεται: ο πληθυσμός και οι μεταβλητές, η διάκρισή τους σε ποιοτικές και ποσοτικές (διακριτές ή συνεχείς), τα στατιστικά δεδομένα, η απογραφή και το δείγμα. Οι έννοιες αυτές δίνουν σχεδόν κάθε χρονιά προτάσεις Σωστού/Λάθους: 2020 (β), 2021 (α), 2024 (δ).

Πληθυσμός — Μεταβλητές

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εξετάσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν ενδιαφερόμαστε για: α) τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων εν όψει των προσεχών εκλογών, β) τον αριθμό των υπαλλήλων μιας επιχείρησης, γ) το ύψος, το βάρος, την ομάδα αίματος και το φύλο των μαθητών της Γ΄ τάξης Λυκείου, δ) τις συνέπειες του καπνίσματος στην υγεία των καπνιστών κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Πληθυσμός

Ένα σύνολο του οποίου θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους λέγεται **πληθυσμός** (population). Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως **μονάδες** ή **άτομα** του πληθυσμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2020)

Μεταβλητές — τιμές — παρατηρήσεις

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** (variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα **κεφαλαία γράμματα X, Y, Z, B, ...** Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται **στατιστικά δεδομένα** ή **παρατηρήσεις**.

Τα στατιστικά δεδομένα **δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά**. Για παράδειγμα, αν εξετάζουμε την ομάδα αίματος δέκα ατόμων, οι παρατηρήσεις μπορεί να είναι: A, B, A, AB, O, AB, AB, AB, O, B. Οι δυνατές όμως τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή «ομάδα αίματος» είναι οι εξής τέσσερις: A, B, AB και O.

Είδη μεταβλητών

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2021, 2024)

Ποιοτικές και ποσοτικές μεταβλητές

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

- Σε **ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές τους **δεν είναι αριθμοί**.
- Σε **ποσοτικές μεταβλητές**, των οποίων οι τιμές είναι **αριθμοί** και διακρίνονται: Σε **διακριτές μεταβλητές**, που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές. Σε **συνεχείς μεταβλητές**, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

Είδος	Παραδείγματα από το βιβλίο
Ποιοτική	Ομάδα αίματος (Α, Β, ΑΒ, Ο)· φύλο (αγόρι, κορίτσι)· συνέπειες καπνίσματος (καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ.)· οικονομική κατάσταση και υγεία (κακή, μέτρια, καλή, πολύ καλή)· ενδιαφέρον για τη Στατιστική (υψηλό, μέτριο, χαμηλό, μηδαμινό).
Ποσοτική διακριτή	Ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (τιμές 1, 2, ...)· το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (τιμές 1, 2, ..., 6).
Ποσοτική συνεχής	Το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου· ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης· η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης.

Η παγίδα του 2021 (α): «Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος (α, β) » — **Λάθος**. Αυτός είναι ο ορισμός των **συνεχών**. Οι διακριτές παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές.

Συλλογή στατιστικών δεδομένων

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Απογραφή

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε **όλα** τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή** (census).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δείγμα — αντιπροσωπευτικό δείγμα

Όπου η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή οικονομικά και χρονικά ασύμφορη, ο ερευνητής μαζεύει πληροφορίες από κάποια μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού, το οποίο καλείται **δείγμα**.

Στην πράξη, ένα δείγμα θεωρείται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε **κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί**.

Σε πολλές περιπτώσεις η εξέταση όλων των μονάδων του πληθυσμού είναι δύσκολη ή ακόμα και αδύνατη. Ένας υποψήφιος βουλευτής, για παράδειγμα, πριν από τις εκλογές είναι δύσκολο να εξετάσει όλους τους ψηφοφόρους. Εξάλλου ένας κατασκευαστής εκρηκτικών μηχανισμών ή ηλεκτρικών λυχνιών είναι αδύνατο να δοκιμάζει όλους τους παραγόμενους μηχανισμούς για να ελέγχει την αποτελεσματικότητά τους, ή όλες τις παραγόμενες λυχνίες για να ελέγχει το χρόνο ζωής τους.

Το ιστορικό παράδειγμα του βιβλίου: εκλογές ΗΠΑ, 1936

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία «προσεκτική» επιλογή **μικρότερου** δείγματος είναι δυνατόν να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από ένα μεγαλύτερο δείγμα που δεν έχει εκλεγεί κατάλληλα.

- Το περιοδικό Literary Digest, με δείγμα **2.400.000** ατόμων, πρόβλεψε νίκη του Landon με ποσοστό 57%.
- Το δημοσκοπικό γραφείο του G. Gallup, με δείγμα **50.000** ατόμων, πρόβλεψε το σωστό αποτέλεσμα: νίκη του Roosevelt με ποσοστό 62%.

Η παταγώδης αποτυχία της δημοσκόπησης του περιοδικού οφειλόταν στο γεγονός ότι **το δείγμα που επελέγη δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού** — όχι στο μέγεθός του.

Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας** (Sampling), που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.

Άσκηση Α΄ Ομάδας (σχολικό βιβλίο, σελ. 61)

Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές; Από τις ποσοτικές ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς;
α) Βάρος β) Αριθμός τροχαίων ατυχημάτων γ) Φύλο δ) Οικογενειακή κατάσταση ε) Στάθμη της λίμνης του Μαραθώνα στ) Τόπος καταγωγής ζ) Επάγγελμα η) Αριθμός παιδιών στην οικογένεια θ) Βαθμολογία στο σκάκι ι) Νούμερο γυναικείων παπουτσιών.

Μεταβλητή	Είδος	Γιατί
α) Βάρος	Ποσοτική συνεχής	Παίρνει οποιαδήποτε τιμή σε ένα διάστημα (π.χ. 62,347 kg).
β) Αριθμός τροχαίων ατυχημάτων	Ποσοτική διακριτή	Μετράει πλήθος: 0, 1, 2, ...
γ) Φύλο	Ποιοτική	Οι τιμές της δεν είναι αριθμοί.
δ) Οικογενειακή κατάσταση	Ποιοτική	Άγαμος, έγγαμος, διαζευγμένος, χήρος.
ε) Στάθμη της λίμνης του Μαραθώνα	Ποσοτική συνεχής	Μήκος — παίρνει κάθε τιμή διαστήματος.
στ) Τόπος καταγωγής	Ποιοτική	Ονόματα τόπων, όχι αριθμοί.
ζ) Επάγγελμα	Ποιοτική	Κατηγορίες χωρίς αριθμητική τιμή.
η) Αριθμός παιδιών στην οικογένεια	Ποσοτική διακριτή	Μεμονωμένες τιμές: 0, 1, 2, 3, ...
θ) Βαθμολογία στο σκάκι	Ποσοτική διακριτή	Οι βαθμοί ELO παίρνουν μεμονωμένες (ακέραιες) τιμές.
ι) Νούμερο γυναικείων παπουτσιών	Ποσοτική διακριτή	Τυποποιημένα νούμερα: 36, 37, 38, ...

2.2 Στατιστικοί πίνακες και κατανομές συχνοτήτων

Τι εξετάζεται: τι πρέπει να περιέχει ένας στατιστικός πίνακας, ο ορισμός της **(απόλυτης) συχνότητας n_i** (Θέμα Α 2018, 2021, 2024), της **σχετικής συχνότητας f_i** με τις ιδιότητές της, η **απόδειξη ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$** (Θέμα Α 2018, 2026) και οι **αθροιστικές συχνότητες N_i, F_i** . Ο πίνακας συχνοτήτων προς συμπλήρωση είναι σταθερό ερώτημα Θέματος Β/Γ: 2020, 2021, 2023, 2025.

Στατιστικοί πίνακες

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών πινάκων ή γραφικών παραστάσεων, ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων.

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

- **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση,
- **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς· τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τι πρέπει να περιέχει κάθε σωστά κατασκευασμένος πίνακας

- α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,
- β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,
- γ) το **κύριο σώμα (κορμό)**, που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,
- δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων.

Πίνακες κατανομής συχνοτήτων

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΖΗΤΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2018, 2021, 2024)

(Απόλυτη) συχνότητα n_i

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η **(απόλυτη) συχνότητα** (frequency) n_i , δηλαδή ο **φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων**.

Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad (1)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2020, 2023)**Σχετική συχνότητα f_i**

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος v του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** (relative frequency) f_i της τιμής x_i , δηλαδή

$$f_i = \frac{v_i}{v}, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa \quad (2)$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

- i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$, αφού $0 \leq v_i \leq v$.
- ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$ (2018, A1γ · 2026, A1)

Από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας $f_i = \frac{v_i}{v}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa &= \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_\kappa}{v} \\ &= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa}{v} \end{aligned}$$

και επειδή από τη σχέση (1) είναι $v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa = v$, προκύπτει

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = \frac{v}{v} = 1$$

$$\text{Ο.Ε.Δ. — } f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$$

Πρόταση Σ/Λ 2023 (α) — Λάθος: «η σχετική συχνότητα f_i μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές». Από την ιδιότητα $0 \leq f_i \leq 1$ είναι πάντα μη αρνητική.

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$, δηλαδή $f_i\% = 100 \cdot f_i$. Τότε ισχύει $f_1\% + f_2\% + \dots + f_\kappa\% = 100$.

Οι ποσότητες x_i, v_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**. Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**.

Αθροιστικές συχνότητες

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ**Αθροιστική συχνότητα N_i και αθροιστική σχετική συχνότητα F_i**

Στην περίπτωση των **ποσοτικών** μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες v_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες **αθροιστικές συχνότητες** (cumulative frequencies) N_i και οι **αθροιστικές σχετικές συχνότητες** (cumulative relative frequencies) F_i , οι οποίες εκφράζουν το **πλήθος** και το **ποσοστό** αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι **μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i** .

Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_K$ είναι σε **αύξουσα διάταξη**, τότε

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i \quad F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i$$

για $i = 1, 2, \dots, K$. Συχνά οι F_i πολλαπλασιάζονται επί 100, εκφραζόμενες έτσι επί τοις εκατό: $F_i\% = 100 \cdot F_i$.

Είναι φανερό ότι ισχύουν και οι **αντίστροφες** σχέσεις, που χρησιμεύουν όταν ο πίνακας δίνεται μισοσυμπληρωμένος:

$$v_1 = N_1, \quad v_2 = N_2 - N_1, \quad \dots, \quad v_K = N_K - N_{K-1}$$

$$f_1 = F_1, \quad f_2 = F_2 - F_1, \quad \dots, \quad f_K = F_K - F_{K-1}$$

Παράδειγμα βιβλίου — «αριθμός αδελφών» 40 μαθητών

Για τη μεταβλητή X : «αριθμός αδελφών» με $n = 40$ μαθητές, οι συχνότητες είναι $v_1 = 8, v_2 = 22, v_3 = 7, v_4 = 3$.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	8	0,200	20	8	20
1	22	0,550	55	30	75
2	7	0,175	17,5	37	92,5
3	3	0,075	7,5	40	100
Σύνολο	40	1	100	—	—

Έλεγχος: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,20 + 0,55 + 0,175 + 0,075 = 1 \checkmark$ και $N_4 = n = 40 \checkmark, F_4\% = 100 \checkmark$. **Οι τρεις αυτοί έλεγχοι πιάνουν κάθε αριθμητικό λάθος σε πίνακα Θέματος Β.**

Πανελλαδικές 2025 — Θέμα Β1 (συμπλήρωση πίνακα)

Ο πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι. Δίνονται $v_2 = 15$ (για 1 ώρα), $v_3 = 11$ (2 ώρες), $v_4 = 8$ (3 ώρες), $v_5 = 6$ (4 ώρες) και σύνολο 50. Να συμπληρωθούν τα κενά.

Βήμα 1 — η άγνωστη συχνότητα από το άθροισμα

$$v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 = 10$$

Βήμα 2 — σχετικές συχνότητες $f_i\% = \frac{100 \cdot v_i}{50} = 2 \cdot v_i$

Βήμα 3 — αθροιστικές, με διαδοχική πρόσθεση

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική $f_i\%$	Αθροιστική N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	—

Το άθροισμα των $f_i\%$ είναι 100 και η τελευταία αθροιστική είναι $50 = n$: ο πίνακας είναι σωστός.

2.2 Γραφική παράσταση κατανομής συχνοτήτων

Τι εξετάζεται: ποιο διάγραμμα ταιριάζει σε ποιο είδος μεταβλητής. Είναι η πιο «παραγωγική» πηγή προτάσεων Σωστού/Λάθους ολόκληρης της ύλης: **ραβδόγραμμα** (2017, 2021, 2026), **διάγραμμα συχνοτήτων** (2024), **κυκλικό διάγραμμα** (2018) και ο **τύπος του τόξου α_i** (2019).

Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονται πολλές φορές και υπό μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων. Οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν πιο σαφή εικόνα του χαρακτηριστικού σε σχέση με τους πίνακες, **χωρίς βέβαια να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία** από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τι πρέπει να συνοδεύει κάθε στατιστικό διάγραμμα

α) τον **τίτλο**, β) την **κλίμακα** με τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται, γ) το **υπόμνημα** που επεξηγεί συνήθως τις τιμές της μεταβλητής και δ) την **πηγή** των δεδομένων.

α) Ραβδόγραμμα

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2017, 2021, 2026)**Ραβδόγραμμα (barchart)**

Το **ραβδόγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας **ποιοτικής** μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα.

Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεων τους καθορίζονται **αυθαίρετα**.

Η παγίδα του 2017 (α) — Λάθος: «Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής». Το ραβδόγραμμα είναι για **ποιοτικές**. Οι σωστές εκδοχές δόθηκαν το 2021 (β) και το 2026 (γ).

β) Διάγραμμα συχνοτήτων**ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2024)****Διάγραμμα συχνοτήτων (line diagram)**

Στην περίπτωση που έχουμε μια **ποσοτική** μεταβλητή, αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**. Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα, με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια, υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < \dots < x_k$) μία **κάθετη γραμμή** με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ**Πολύγωνο συχνοτήτων**

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε.

Η παγίδα του 2024 (β) — Λάθος: «Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής». Ισχύει το αντίστροφο: **ραβδόγραμμα → ποιοτική, διάγραμμα συχνοτήτων → ποσοτική**.

γ) Κυκλικό διάγραμμα**ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2018, 2019)****Κυκλικό διάγραμμα (piechart)**

Το **κυκλικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση **τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών** δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι **ανάλογα** προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i . Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος, τότε

$$\alpha_i = \left(\frac{v_i}{v} \right) \cdot 360^\circ = f_i \cdot 360^\circ, \text{ για } i = 1, 2, \dots, k$$

Η παγίδα του 2018 (γ) — Λάθος: «Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων». Το κυκλικό δέχεται **και τα δύο** είδη. Το 2019 (δ) δόθηκε ο σωστός τύπος του τόξου.

Χρήσιμος αντίστροφος υπολογισμός για το Θέμα Γ: από το τόξο βρίσκουμε τη συχνότητα με $n_i = n \cdot \frac{\alpha_i}{360}$. Έτσι λύθηκε το **2021 Γ1**, όπου δίνονταν τα τόξα 36° και 144° για δείγμα 50 εκπαιδευτικών.

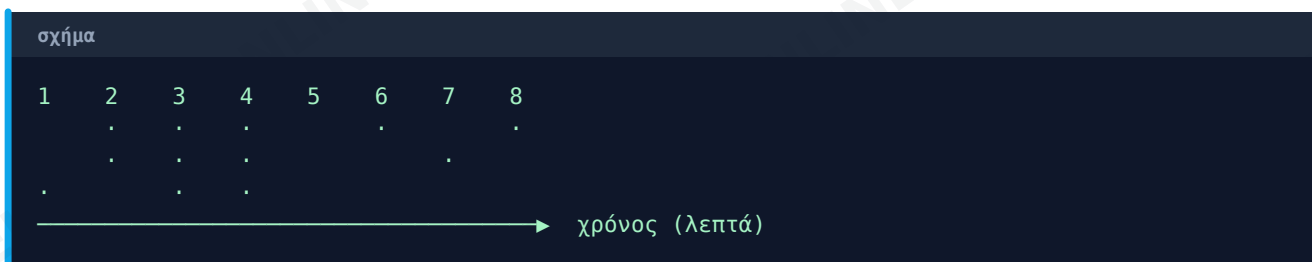
δ) Σημειόγραμμα

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Σημειόγραμμα (dot diagram)

Όταν έχουμε **λίγες παρατηρήσεις**, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα**, στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν **σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα**.

Παράδειγμα του βιβλίου: οι χρόνοι (σε λεπτά) 4, 2, 3, 1, 5, 6, 4, 2, 3, 4, 7, 4, 8, 6, 3 που χρειάστηκαν δεκαπέντε μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα.



ε) Χρονόγραμμα

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Χρονόγραμμα (χρονολογικό διάγραμμα)

Το **χρονόγραμμα** ή **χρονολογικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της **διαχρονικής εξέλιξης** ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του **χρόνου** και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.

Συγκεντρωτικά: ποιο διάγραμμα για ποια μεταβλητή

Διάγραμμα	Ποιοτική	Ποσοτική	Πότε το χρησιμοποιούμε
Ραβδόγραμμα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	Τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής (φύλο, επάγγελμα, ομάδα αίματος).
Διάγραμμα συχνοτήτων	ΟΧΙ	ΝΑΙ	Ποσοτική μεταβλητή, μη ομαδοποιημένα δεδομένα.
Κυκλικό διάγραμμα	ΝΑΙ	ΝΑΙ	Και τα δύο είδη, όταν οι τιμές είναι σχετικά λίγες.
Σημειόγραμμα	ΟΧΙ	ΝΑΙ	Όταν οι παρατηρήσεις είναι λίγες.
Χρονόγραμμα	ΟΧΙ	ΝΑΙ	Διαχρονική εξέλιξη μεγέθους.
Ιστόγραμμα	ΟΧΙ	ΝΑΙ	Ποσοτική μεταβλητή με ομαδοποιημένα δεδομένα (επόμενη ενότητα).

Πανελλαδικές 2021 — Θέμα Γ1 (από το τόξο στη συχνότητα)

Δίνεται ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων για τα έτη υπηρεσίας $n = 50$ εκπαιδευτικών, σε κλάσεις $[4,8)$, $[8,12)$, $[12,16)$, $[16,20)$. Δίνονται $n_1 = 5$, $\alpha_1 = 36^\circ$, $x_3 = 14$, $n_4 = 20$, $\alpha_4 = 144^\circ$. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Βήμα 1 — κεντρικές τιμές

Η κεντρική τιμή κάθε κλάσης είναι το ημίαθροισμα των ορίων της:

$$x_1 = \frac{4 + 8}{2} = 6, \quad x_2 = \frac{8 + 12}{2} = 10, \quad x_3 = \frac{12 + 16}{2} = 14 \checkmark, \quad x_4 = \frac{16 + 20}{2} = 18$$

Βήμα 2 — έλεγχος με το τόξο

$$\alpha_1 = \frac{n_1}{n} \cdot 360^\circ = \frac{5}{50} \cdot 360^\circ = 36^\circ \checkmark \quad \alpha_4 = \frac{n_4}{n} \cdot 360^\circ = 144^\circ \checkmark$$

Βήμα 3 — οι υπόλοιπες συχνότητες

Από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων προκύπτουν $f_2 = 0,30$ και $f_3 = 0,20$, οπότε $n_2 = 0,30 \cdot 50 = 15$ και $n_3 = 0,20 \cdot 50 = 10$. Έλεγχος: $5 + 15 + 10 + 20 = 50 \checkmark$

Έτη υπηρεσίας	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική f_i	Τόξο α_i
$[4, 8)$	6	5	0,10	36°
$[8, 12)$	10	15	0,30	108°
$[12, 16)$	14	10	0,20	72°
$[16, 20)$	18	20	0,40	144°
Σύνολο	—	50	1	360°

Γ2. Τουλάχιστον 8 έτη: $15 + 10 + 20 = 45$ εκπαιδευτικοί. **Γ3.** Λιγότερο από 16 έτη: $\frac{5 + 15 + 10}{50} = \frac{30}{50} = 60\%$. **Γ4.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει το πολύγωνο **σχετικών** συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με **1**.

2.2 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων — Ιστόγραμμα

Τι εξετάζεται: η **ομαδοποίηση σε κλάσεις** (πλάτος, όρια, κεντρικές τιμές), το **ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων** με την ιδιότητα ότι το εμβαδόν ισούται με το μέγεθος του δείγματος (Θέμα Α 2026) και οι **καμπύλες συχνοτήτων** — ιδίως η **κανονική κατανομή**, που είναι το κλειδί για τα Θέματα Γ/Δ του 2017 και του 2022.

Εκτός εξεταστέας ύλης: η υποπαράγραφος «**Κλάσεις άνισου πλάτους**» (ιστόγραμμα με ύψη $v_i = \frac{n_i}{c_i}$) **δεν εξετάζεται**. Όλες οι κλάσεις που θα συναντήσεις στις Πανελλαδικές είναι **ισοπλατείς**.

Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων

Οι πίνακες συχνοτήτων και τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι δύσκολο να κατασκευαστούν, όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΒΙΒΛΙΟΥ

Κλάσεις, όρια, κεντρικές τιμές

- Οι ομάδες ονομάζονται **κλάσεις** (class intervals), έτσι ώστε **κάθε τιμή να ανήκει μόνο σε μία κλάση**.
- Τα άκρα των κλάσεων καλούνται **όρια των κλάσεων** (class boundaries).
- Συνήθως υιοθετούμε την περίπτωση που μια κλάση **περιέχει το κάτω άκρο της** (κλειστή αριστερά) αλλά **όχι το άνω άκρο της** (ανοικτή δεξιά), δηλαδή οι κλάσεις είναι της μορφής $[,)$.
- Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να «αντιπροσωπευθούν» από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.

Τα βήματα της ομαδοποίησης

1. Πλήθος κλάσεων k Ορίζεται συνήθως αυθαίρετα από τον ερευνητή, σύμφωνα με την πείρα του.

2. Πλάτος c Πλάτος κλάσης = ανώτερο όριο – κατώτερο όριο. Για ισοπλατείς κλάσεις: $c = \frac{R}{k}$, με στρογγύλευση **πάντα προς τα πάνω**.

3. Κατασκευή κλάσεων Ξεκινώντας από τη μικρότερη παρατήρηση (ή λίγο πιο κάτω) και προσθέτοντας κάθε φορά το c .

4. Διαλογή Το πλήθος n_i που προκύπτει για την κλάση i καλείται συχνότητα της κλάσης ή της κεντρικής τιμής x_i .

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Εύρος R

Για να κατασκευάσουμε ισοπλατείς κλάσεις, χρησιμοποιούμε το **εύρος** (range) R του δείγματος, δηλαδή τη **διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη** παρατήρηση του συνολικού δείγματος. Τότε υπολογίζουμε το πλάτος c των κλάσεων διαιρώντας το εύρος R διά του αριθμού των κλάσεων k .

Τι πρέπει να προσεχτεί (τρεις κανόνες του βιβλίου):

- Καμία παρατήρηση δεν μπορεί να μείνει έξω από κάποια κλάση.
- Οι κεντρικές τιμές διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το **πλάτος** των κλάσεων.
- Μία παρατήρηση που συμπίπτει με το **άνω άκρο** μιας κλάσης θα τοποθετηθεί κατά τη διαλογή στην **αμέσως επόμενη** κλάση. Για παράδειγμα, ο μαθητής με ύψος 180 θα τοποθετηθεί στην κλάση $[180, 186)$.

Το παράδειγμα του βιβλίου: το ύψος 40 μαθητών

Μικρότερη τιμή 156 cm, μεγαλύτερη 191 cm, $n = 40$ παρατηρήσεις.

$$R = 191 - 156 = 35 \quad k = 6 \quad c = \frac{R}{k} = \frac{35}{6} = 5,83 \approx 6$$

Με αρχή της πρώτης κλάσης το 156:

Κλάσεις ύψους	Κεντρική τιμή x_i	n_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[156, 162)	159	2	5,0	2	5,0
[162, 168)	165	8	20,0	10	25,0
[168, 174)	171	12	30,0	22	55,0
[174, 180)	177	11	27,5	33	82,5
[180, 186)	183	5	12,5	38	95,0
[186, 192)	189	2	5,0	40	100,0
Σύνολο	—	40	100	—	—

Οι κεντρικές τιμές 159, 165, 171, 177, 183, 189 διαφέρουν κατά 6 — όσο και το πλάτος c , ακριβώς όπως λέει ο κανόνας.

Ιστογράμμα συχνοτήτων**ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ****Ιστογράμμα (histogram)**

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με **ομαδοποιημένα** δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα συχνοτήτων**. Στον οριζόντιο άξονα σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από τα οποία καθένα έχει **βάση ίση με το πλάτος της κλάσης** και **ύψος τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης** αυτής.

Κλάσεις ίσου πλάτους: θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστογράμμα συχνοτήτων βάζουμε τις **συχνότητες**.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Α ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2026)**Πολύγωνο συχνοτήτων και το εμβαδόν του**

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε **δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις**, στην αρχή και στο τέλος, **με συχνότητα μηδέν** και στη συνέχεια ενώσουμε τα **μέσα των άνω βάσεων** των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** (frequency polygon).

Το **εμβαδόν** του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή **με το μέγεθος του δείγματος n** . Όμοια, από το ιστογράμμα σχετικών συχνοτήτων προκύπτει το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με **1**.

Οι δύο αυτές τιμές είναι το πιο συχνό «γρήγορο» ερώτημα: εμβαδόν **πολυγώνου συχνοτήτων** = v (2026, ε — Σωστό), εμβαδόν **πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων** = **1** (2021, Γ4).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων (ogive)

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων. Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** (ogive) της κατανομής.

Καμπύλες συχνοτήτων

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Καμπύλη συχνοτήτων (frequency curve)

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας **ομαλής καμπύλης**, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**.

(α) Ομοιόμορφη

Όταν οι παρατηρήσεις «κατανέμονται» ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[a, b]$.

(β) Κανονική κατανομή

Με «κωδωνοειδή» μορφή. **Παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική** — και στα Θέματα Γ/Δ.

(γ) Θετική ασυμμετρία

Οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες· η «ουρά» εκτείνεται δεξιά.

(δ) Αρνητική ασυμμετρία

Ασύμμετρη κατανομή με την «ουρά» να εκτείνεται αριστερά.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 (σχολικό βιβλίο, σελ. 77) — το ορθογώνιο που «σβήστηκε»

Σε ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$) σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης $[2, 5)$. Τα υπόλοιπα ορθογώνια είναι: $[0,1)$ με ύψος 10, $[1,2)$ με ύψος 20 και $[5,10)$ με ύψος 5. Εάν είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει μισθός άνω των \$1000, να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό.

Βήμα 1 — η ιδιότητα των εμβαδών

Επειδή έχουμε ιστόγραμμα **σχετικών** συχνοτήτων επί τοις εκατό, το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων θα πρέπει να ισούται με **100**.

Βήμα 2 — τα γνωστά εμβαδά

$$E_1 = (1 - 0) \cdot 10 = 10 \quad E_2 = (2 - 1) \cdot 20 = 20 \quad E_4 = (10 - 5) \cdot 5 = 25$$

Βήμα 3 — το εμβαδόν που λείπει

$$E_3 = 100 - (10 + 20 + 25) = 45$$

Βήμα 4 — από το εμβαδόν στο ύψος

Το πλάτος του ορθογωνίου είναι $5 - 2 = 3$, άρα

$$u_3 = \frac{E_3}{c_3} = \frac{45}{3} = 15$$

Το ζητούμενο ορθογώνιο έχει βάση την κλάση $[2, 5)$ και **ύψος 15**.

2.3 Μέτρα θέσης

Τι εξετάζεται: η **μέση τιμή** (και για πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα), ο **σταθμικός μέσος** (Θέμα Α 2017, 2024) και η **διάμεσος δ**, της οποίας ο ορισμός ζητήθηκε αυτούσιος το 2022 και το 2026.

Εκτός εξεταστέας ύλης: οι υποπαράγραφοι «**Εκατοστημόρια**» (τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3, P_K) και «**Επικρατούσα τιμή**» (M_0) **δεν εξετάζονται**.

Γιατί χρειάζονται μέτρα θέσης

Έστω ένας καθηγητής ο οποίος, για να συγκρίνει δύο τμήματα Α και Β ως προς την επίδοσή τους, πήρε τυχαία 10 μαθητές από κάθε τμήμα:

σχήμα

Τμήμα Α:	13	13	14	15	15	15	15	16	16	18
Τμήμα Β:	10	13	14	14	15	15	15	16	18	20

Η βαθμολογία και των δύο τμημάτων είναι συγκεντρωμένη γύρω στο 15, αλλά το δεύτερο τμήμα παρουσιάζει **μεγαλύτερη διασπορά** βαθμών από το πρώτο. Οι έννοιες «**κεντρική τιμή**» και «**διασπορά των παρατηρήσεων**» μας δίνουν το ερέθισμα να ορίσουμε κάποια μέτρα που να μας δίνουν α) τη **θέση του «κέντρου**» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και β) τη **διασπορά** των παρατηρήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2019, 2022, 2023)**Μέτρα θέσης — μέτρα διασποράς**

Τα πρώτα τα καλούμε **μέτρα θέσης** της κατανομής (location measures), ενώ τα δεύτερα **μέτρα διασποράς** ή μέτρα μεταβλητότητας (measures of variability).

Τα πιο συνηθισμένα **μέτρα θέσης** είναι ο **αριθμητικός μέσος** ή **μέση τιμή**, η **διάμεσος** και η **κορυφή** ή **επικρατούσα τιμή**.

Η πιο συχνή παγίδα ολόκληρης της Στατιστικής: «Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς» (2019 γ, 2022 γ) — **Λάθος**. Είναι μέτρο **θέσης**. Αντίθετα, «η διάμεσος είναι μέτρο θέσης» (2023 ε) — **Σωστό**.

α) Μέση τιμή**ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ****Μέση τιμή (αριθμητικός μέσος)**

Η **μέση τιμή** ενός συνόλου n παρατηρήσεων αποτελεί το σπουδαιότερο και χρησιμότερο μέτρο της Στατιστικής και ορίζεται ως το **άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων**.

Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους n οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι $t_1, t_2, \dots, t_n$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{\sum_{i=1..n} t_i}{n} \quad (1)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ**Μέση τιμή σε κατανομή συχνοτήτων**

Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1..k} x_i v_i}{n} \quad (2)$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται με τις σχετικές συχνότητες:

$$\bar{x} = \sum_{i=1..k} x_i \cdot f_i$$

Για τα δύο τμήματα του παραδείγματος:

$$\bar{x}_A = \frac{13 + 13 + 14 + \dots + 18}{10} = \frac{150}{10} = 15 \quad \bar{x}_B = 15$$

Ομαδοποιημένα δεδομένα: ως x_i παίρνουμε την **κεντρική τιμή** κάθε κλάσης. Για το ύψος των 40 μαθητών, η μέση τιμή από τα μη ομαδοποιημένα δεδομένα είναι $\frac{6918}{40} = 172,95$ cm, ενώ από τον ομαδοποιημένο πίνακα $\frac{6930}{40} = 173,25$ cm. Η διαφορά οφείλεται στο ότι κατά την ομαδοποίηση υποθέσαμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και εκπροσωπούνται από την κεντρική τιμή: **χάνουμε λίγο σε ακρίβεια, κερδίζουμε όμως χρόνο**.

β) Σταθμικός μέσος

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΖΗΤΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2017, 2024)**Σταθμικός μέσος (weighted mean)**

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**. Εάν σε κάθε τιμή δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους **συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)** $w_1, w_2, \dots, w_n$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$$

Παράδειγμα βιβλίου — εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Συνυπολογίζονται ο βαθμός x_1 του απολυτηρίου με συντελεστή $w_1 = 7,5$, ο βαθμός x_2 στο τεστ δεξιοτήτων με $w_2 = 1$, ο βαθμός x_3 στο 1ο βασικό μάθημα με $w_3 = 1$ και ο βαθμός x_4 στο 2ο βασικό μάθημα με $w_4 = 0,5$. Αν ένας μαθητής πάρει $x_1 = 16,5$, $x_2 = 18$, $x_3 = 17$ και $x_4 = 16,6$:

$$\bar{x} = \frac{16,5 \cdot 7,5 + 18 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 16,6 \cdot 0,5}{7,5 + 1 + 1 + 0,5} = \frac{167}{10} = 16,7$$

Ο σταθμικός μέσος της επίδοσής του είναι **16,7**. Παρατήρησε ότι ο απλός αριθμητικός μέσος θα ήταν 17,025 — η βαρύτητα του απολυτηρίου «τραβάει» τον μέσο προς τα κάτω.

γ) Διάμεσος (δ)

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι: 3, 5, 5, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή $\bar{x} = 9$. Παρατηρούμε όμως ότι οι **οκτώ από τις εννέα** παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 9 και μία **ακραία τιμή** (το 36), η οποία επηρεάζει και τη μέση τιμή, είναι αρκετά μεγαλύτερη του 9. Αυτό σημαίνει ότι η μέση τιμή **δεν ενδείκνυται** ως μέτρο θέσης των παρατηρήσεων αυτών. Αντίθετα, ένα άλλο μέτρο θέσης που **δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις** είναι η διάμεσος.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΖΗΤΗΘΗΚΕ ΑΥΤΟΥΣΙΟΣ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2022, 2026)**Διάμεσος (median)**

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά** ορίζεται ως:

- η **μεσαία παρατήρηση**, όταν το n είναι **περιττός** αριθμός, ή
- ο **μέσος όρος (ημιάθροισμα)** των **δύο μεσαίων** παρατηρήσεων, όταν το n είναι **άρτιος** αριθμός.

Παραδείγματα βιβλίου (σελ. 87-88)

α) Περιττό πλήθος: $n = 13$

Δεδομένα: 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9. Σε αύξουσα σειρά:

σχήμα												
0	1	1	1	2	3	4	5	6	6	8	8	9
						↑						
						7η	θέση					

Η διάμεσος είναι η μεσαία (7η) παρατήρηση: $\delta = 4$.

β) Άρτιο πλήθος: $n = 14$

Δεδομένα: 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9, 9. Σε αύξουσα σειρά:

σχήμα													
0	1	1	1	2	3	4	5	6	6	8	8	9	9
						↑	↑						
						7η	8η	θέση					

$$\delta = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ**Τι σημαίνει η διάμεσος**

Η διάμεσος είναι η τιμή που **χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη**, όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία **το πολύ 50%** των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και **το πολύ 50%** των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Το βήμα που ξεχνιέται: πριν από κάθε υπολογισμό διαμέσου, **διάταξε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά**. Το 2018 (B1), όπου ζητούνταν το α ώστε η διάμεσος των 14, 12, 18, $4\alpha - 1$, 16 να είναι 15, η όλη λύση στηρίζεται στο ποια θέση παίρνει το $4\alpha - 1$ στη διάταξη.

Διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Η διάμεσος αντιστοιχεί στην τιμή $x = \delta$ της μεταβλητής X , έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ . Δηλαδή η διάμεσος θα έχει **αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i = 50\%$** . Εφόσον στον κάθετο άξονα του πολυγώνου αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων έχουμε τις F_i , από το σημείο A (50% των παρατηρήσεων) φέρουμε παράλληλη προς τον O α μέχρι την πολυγωνική γραμμή και στη συνέχεια κάθετη στον O α . Στο σημείο τομής αντιστοιχεί η διάμεσος. Για το ύψος των 40 μαθητών βρίσκουμε $\delta \approx 173$ cm.

Πανελλαδικές 2026 — Θέμα Γ1, Γ2 (μέση τιμή και διάμεσος)

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν επτά μαθητές στις θερινές διακοπές είναι: 4, 5, 4, κ, 0, 3, 7, όπου κ φυσικός αριθμός.

Γ1. Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων είναι $\bar{x} = 4$, να βρείτε τον κ. Γ2. Για κ = 5, να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Γ1 — από τον ορισμό της μέσης τιμής

$$\bar{x} = \frac{4 + 5 + 4 + \kappa + 0 + 3 + 7}{7} = \frac{23 + \kappa}{7}$$

$$\frac{23 + \kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

Γ2 — διάταξη και μεσαία παρατήρηση

Για κ = 5 οι παρατηρήσεις είναι 4, 5, 4, 5, 0, 3, 7. Σε αύξουσα σειρά:

σχήμα

```

0   3   4   4   5   5   7
          ↑
        4η θέση (ν = 7, περιττό)

```

Το ν = 7 είναι περιττός, άρα η διάμεσος είναι η μεσαία (4η) παρατήρηση: **δ = 4**.

2.3 Μέτρα διασποράς

Τι εξετάζεται: το εύρος R, η διακύμανση s^2 με τους δύο ισοδύναμους τύπους της, η τυπική απόκλιση s και οι ιδιότητές της στην κανονική κατανομή (68% – 95% – 99,7%), ο συντελεστής μεταβολής CV με το κριτήριο ομοιογένειας, και οι ιδιότητες μετασχηματισμού των παρατηρήσεων. Είναι το πιο «πολυχρησιμοποιημένο» κομμάτι της ύλης: εμφανίζεται στα Θέματα Β/Γ/Δ και των δέκα εξεταστικών 2017-2026.

Εκτός εξεταστέας ύλης: η υποπαράγραφος «Ενδοτεταρτημοριακό εύρος» ($Q = Q_3 - Q_1$) δεν εξετάζεται.

Τα μέτρα θέσης δεν επαρκούν για να περιγράψουν πλήρως την κατανομή. Ενώ οι βαθμολογίες των δύο τμημάτων Α και Β έχουν ίσες μέσες τιμές $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$ και ίσες διαμέσους $\delta_A = \delta_B = 15$, είναι φανερό ότι οι κατανομές τους διαφέρουν σημαντικά ως προς τη **μεταβλητότητα** τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Μέτρα διασποράς

Μέτρα διασποράς (measures of variation) είναι μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

α) Εύρος (R)

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2017, 2025, 2026)**Εύρος ή κύμανση (range)**

Το απλούστερο από τα μέτρα διασποράς είναι το **εύρος** (R), που ορίζεται ως η **διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη** παρατήρηση, δηλαδή:

$$R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{Μικρότερη παρατήρηση}$$

Όταν έχουμε **ομαδοποιημένα δεδομένα**, το εύρος δίνεται από τη διαφορά του **κατώτερου ορίου της πρώτης κλάσης** από το **ανώτερο όριο της τελευταίας κλάσης**.

Έτσι, για τη βαθμολογία του τμήματος Α το εύρος είναι $R_A = 18 - 13 = 5$, ενώ για το τμήμα Β $R_B = 20 - 10 = 10$ — τιμές που επιβεβαιώνουν ότι στο Β έχουμε μεγαλύτερη διασπορά.

ΤΟ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ 2026 (Α)

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο, που υπολογίζεται εύκολα, **δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς**, γιατί βασίζεται μόνο στις **δύο ακραίες** παρατηρήσεις.

Δύο διαφορετικές προτάσεις, δύο διαφορετικές απαντήσεις: «Το εύρος **είναι** ένα μέτρο διασποράς» (2017 γ, 2025 β) — **Σωστό**. «Το εύρος θεωρείται **αξιόπιστο** μέτρο διασποράς» (2026 α) — **Λάθος**.

β) Διακύμανση (s^2)**ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Α — ο μέσος των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι 0 (2025, Α1)**

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με 0.

Ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n}$$

Στον αριθμητή, η $\bar{x}$ αφαιρείται n φορές:

$$= \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_n) - n \cdot \bar{x}}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - \bar{x}$$

Όμως από τον ορισμό της μέσης τιμής είναι $\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \bar{x}$, οπότε

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Ο.Ε.Δ. — ακριβώς γι' αυτό η διασπορά δεν μπορεί να οριστεί ως ο μέσος των αποκλίσεων: θα ήταν πάντα μηδέν. Γι' αυτό υψώνουμε τις αποκλίσεις στο τετράγωνο.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2018)**Διακύμανση ή διασπορά (variance)**

Ως μέτρο διασποράς παίρνουμε τον **μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων** των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$. Το μέτρο αυτό καλείται **διακύμανση** και ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \left(\frac{1}{v}\right) \cdot \sum_{i=1..v} (t_i - \bar{x})^2 \quad (1)$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \left(\frac{1}{v}\right) \cdot \left[\sum t_i^2 - \frac{1}{v} \cdot (\sum t_i)^2 \right] \quad (2)$$

η οποία **διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς**, κυρίως όταν η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ**Διακύμανση σε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα**

$$s^2 = \left(\frac{1}{v}\right) \cdot \sum_{i=1..k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i \quad (3)$$

ή την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \left(\frac{1}{v}\right) \cdot \left[\sum x_i^2 v_i - \frac{1}{v} \cdot (\sum x_i v_i)^2 \right] \quad (4)$$

όπου $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Για παράδειγμα, η διακύμανση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος Α είναι, σύμφωνα με την (1):

$$s^2_A = \frac{(13-15)^2 + (13-15)^2 + (14-15)^2 + \dots + (18-15)^2}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

ενώ για τους μαθητές του τμήματος Β βρίσκουμε $s^2_B = 6,6$, που επιβεβαιώνει ότι η βαθμολογία του Β παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

γ) Τυπική απόκλιση (s)**ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2025)****Τυπική απόκλιση (standard deviation)**

Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα: **δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις**. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, η διακύμανση εκφράζεται σε cm². Αν όμως πάρουμε τη **θετική τετραγωνική ρίζα** της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού. Η ποσότητα αυτή λέγεται **τυπική απόκλιση**, συμβολίζεται με s και δίνεται από τη σχέση:

$$s = \sqrt{s^2}$$

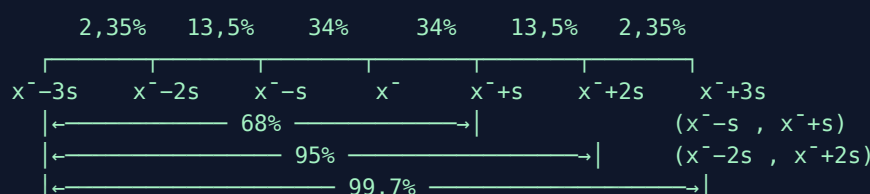
Η παγίδα του 2025 (α) — Λάθος: «Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις». Με τις ίδιες μονάδες εκφράζεται η **τυπική απόκλιση**· η διακύμανση στο **τετράγωνο** των μονάδων.

Οι ιδιότητες της τυπικής απόκλισης στην κανονική κατανομή

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2018, 2023)**Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική**

- i) το **68%** περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
- ii) το **95%** περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- iii) το **99,7%** περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
- iv) το εύρος ισούται περίπου με **έξι τυπικές αποκλίσεις**, δηλαδή $R \approx 6s$

σχήμα



Το «σπάσιμο» του 68% σε **34% + 34%** και του 95% σε **47,5% + 47,5%** είναι το εργαλείο για κάθε ερώτημα κανονικής κατανομής. Από τη συμμετρία: αριστερά του $\bar{x}$ βρίσκεται το **50%**, μεταξύ $\bar{x} - 2s$ και $\bar{x} - s$ το **13,5%**, και κάτω από το $\bar{x} - s$ το **16%**.

δ) Συντελεστής μεταβολής (CV)

Έστω ότι από δείγμα μαθητών Α΄ Γυμνασίου βρήκαμε μέσο βάρος $\bar{x}_A = 40$ kg και $s_A = 6$ kg, ενώ από δείγμα Γ΄ Λυκείου $\bar{x}_B = 75$ kg και $s_B = 6$ kg. Είναι λάθος να πούμε ότι έχουν τον ίδιο βαθμό μεταβλητότητας, καθώς η βαρύτητα που έχουν τα 6 kg στα 40 kg είναι διαφορετική από αυτήν που έχουν στα 75 kg.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ — ΠΡΟΤΑΣΗ Σ/Λ ΣΤΟ ΘΕΜΑ Α (2022)**Συντελεστής μεταβολής (coefficient of variation)**

Ο **συντελεστής μεταβολής** ή συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος για $\bar{x} \neq 0$ ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$$

Αν $\bar{x} < 0$, τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι **ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης**, εκφράζεται επί τοις εκατό και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής** διασποράς των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς.

Η παγίδα του 2022 (α) — Λάθος: «Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης». Είναι ακριβώς το αντίθετο — γι' αυτό ακριβώς χρησιμοποιείται για συγκρίσεις.

Για το παράδειγμα του βάρους:

$$CV_A = \frac{6}{40} = 0,15 = 15\% \quad CV_B = \frac{6}{75} = 0,08 = 8\%$$

δηλαδή ο βαθμός διασποράς του βάρους των μαθητών Γυμνασίου είναι μεγαλύτερος από αυτόν των μαθητών Λυκείου.

ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ — ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΙΑ**Πότε ένα δείγμα είναι ομοιογενές**

Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι **ομοιογενές**, εάν ο συντελεστής μεταβολής **δεν ξεπερνά το 10%**.

$$CV \leq 10\% \Rightarrow \text{ομοιογενές} \quad CV > 10\% \Rightarrow \text{μη ομοιογενές}$$

Ιδιότητες: τι γίνεται αν αλλάξουν οι παρατηρήσεις**ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΒΙΒΛΙΟΥ (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3, σελ. 99) — γραμμικός μετασχηματισμός**

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x .

α) Αν $y_i = x_i + c$, ναδειχτεί ότι i) $\bar{y} = \bar{x} + c$ και ii) $s_y = s_x$.

β) Αν $y_i = c \cdot x_i$, να αποδειχτεί ότι i) $\bar{y} = c \cdot \bar{x}$ και ii) $s_y = |c| \cdot s_x$.

α i) Πρόσθεση σταθεράς — μέση τιμή

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = \frac{(x_1 + c) + \dots + (x_n + c)}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{nc}{n} = \bar{x} + c$$

α ii) Πρόσθεση σταθεράς — τυπική απόκλιση

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}{n} = \frac{(x_1 + c - \bar{x} - c)^2 + \dots + (x_n + c - \bar{x} - c)^2}{n} \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = s_x^2 \quad \text{άρα } s_y = s_x \end{aligned}$$

β i) Πολλαπλασιασμός επί σταθερά — μέση τιμή

$$\bar{y} = \frac{cx_1 + \dots + cx_n}{n} = \frac{c(x_1 + \dots + x_n)}{n} = c \cdot \bar{x}$$

β ii) Πολλαπλασιασμός επί σταθερά — τυπική απόκλιση

$$s_y^2 = \frac{(cx_1 - c\bar{x})^2 + \dots + (cx_n - c\bar{x})^2}{n} = c^2 \cdot \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = c^2 \cdot s_x^2$$

Άρα $s_y = |c| \cdot s_x$. Η απόλυτη τιμή είναι απαραίτητη: η τυπική απόκλιση δεν μπορεί να είναι αρνητική.

Μετασχηματισμός	Νέα μέση τιμή	Νέα τυπική απόκλιση	Νέος CV
$y = x + c$	$\bar{y} = \bar{x} + c$	$s_y = s_x$	αλλάζει
$y = c \cdot x$	$\bar{y} = c \cdot \bar{x}$	$s_y = c \cdot s_x$	δεν αλλάζει (για $c > 0$)
$y = c \cdot x + d$	$\bar{y} = c \cdot \bar{x} + d$	$s_y = c \cdot s_x$	αλλάζει
Αύξηση κατά $p\%$	$\bar{y} = (1 + \frac{p}{100}) \cdot \bar{x}$	$s_y = (1 + \frac{p}{100}) \cdot s_x$	δεν αλλάζει

Η τελευταία γραμμή είναι ακριβώς η απάντηση στο **2024 Γ4** (αύξηση θερμοκρασιών κατά 10% $\Rightarrow$ ο CV μένει 20%) και στο **2018 Β4** (πολλαπλασιασμός επί -2 και αύξηση κατά 5). Ο CV μένει σταθερός μόνο στον καθαρό πολλαπλασιασμό — μια πρόσθεση τον αλλάζει, γιατί μεταβάλλει τη μέση τιμή αλλά όχι την τυπική απόκλιση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 (σχολικό βιβλίο, σελ. 97) — μέση τιμή, διάμεσος, τυπική απόκλιση από πίνακα

Ο πίνακας δίνει την κατανομή του χρόνου X (σε sec) 60 μαθητών που χρειάστηκαν για να τρέξουν μια δεδομένη απόσταση: $x_i = 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80$ με $v_i = 4, 6, 8, 12, 14, 10, 6$. Να υπολογιστούν α) ο μέσος και ο διάμεσος χρόνος, β) η τυπική απόκλιση.

α) Μέση τιμή

x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$	N_i
50	4	200	10.000	4
55	6	330	18.150	10
60	8	480	28.800	18
65	12	780	50.700	30
70	14	980	68.600	44
75	10	750	56.250	54
80	6	480	38.400	60
Σύνολο	60	4.000	270.900	—

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{n} = \frac{4000}{60} \approx 66,67 \text{ sec}$$

Διάμεσος

Έχουμε $n = 60$ παρατηρήσεις (άρτιο), άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 30ής και της 31ης παρατήρησης. Από τη στήλη N_i : η 30ή είναι 65 και η 31η είναι 70.

$$\delta = \frac{65 + 70}{2} = 67,5 \text{ sec}$$

β) Τυπική απόκλιση με τον υπολογιστικό τύπο (4)

Επειδή η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος, χρησιμοποιούμε τον τύπο (4):

$$s^2 = \frac{1}{60} \cdot \left[270.900 - \frac{(4000)^2}{60} \right] = \frac{1}{60} \cdot [270.900 - 266.666,67] \approx 70,56 \text{ sec}^2$$

$$s = \sqrt{70,56} \approx 8,4 \text{ sec}$$

Μέσος χρόνος $\approx 66,67 \text{ sec}$, διάμεσος $67,5 \text{ sec}$, τυπική απόκλιση $\approx 8,4 \text{ sec}$. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{8,4}{66,67} \approx 12,6\% > 10\%$, άρα το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

Λυμένες Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Πέντε ολοκληρωμένες ασκήσεις από πραγματικά θέματα Πανελλαδικών. Καλύπτουν τους τέσσερις τύπους που εναλλάσσονται κάθε χρονιά: **δείγμα με άγνωστη παρατήρηση, κανονική κατανομή, ομαδοποιημένα δεδομένα σε πίνακα και μετασχηματισμός παρατηρήσεων**.

Πανελλαδικές 2018 — Θέμα Β (Β1, Β2, Β3, Β4)

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha - 1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η διάμεσος είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α .

B2. Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .

B3. Για $\alpha = 4$ να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

B4. Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν αν ο καθένας πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

B1 — η διάμεσος σε δείγμα περιττού πλήθους

Έχουμε $n = 5$ παρατηρήσεις (περιττός), άρα η διάμεσος είναι η 3η παρατήρηση της αύξουσας διάταξης. Οι τέσσερις γνωστές, διατεταγμένες, είναι 12, 14, 16, 18. Για να είναι η διάμεσος 15, η άγνωστη παρατήρηση πρέπει να πάρει την 3η θέση και να είναι ίση με 15:

$$4\alpha - 1 = 15 \iff 4\alpha = 16 \iff \alpha = 4$$

Έλεγχος: με $4\alpha - 1 = 15$ η διάταξη είναι 12, 14, **15**, 16, 18 και η διάμεσος όντως 15. ✓

B2 — μέση τιμή και διακύμανση

Για $\alpha = 4$ οι αριθμοί είναι 14, 12, 18, 15, 16.

$$\bar{x} = \frac{14 + 12 + 18 + 15 + 16}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Επειδή η μέση τιμή είναι ακέραιος, χρησιμοποιούμε τον ορισμό (1):

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(14-15)^2 + (12-15)^2 + (18-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2}{5} \\ &= \frac{1 + 9 + 9 + 0 + 1}{5} = \frac{20}{5} = 4 \end{aligned}$$

B3 — έλεγχος ομοιογένειας

$$s = \sqrt{4} = 2 \quad CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{15} \approx 0,1333 = 13,33\%$$

Επειδή $CV \approx 13,33\% > 10\%$, το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

B4 — μετασχηματισμός $y = -2x + 5$

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες $\bar{y} = c \cdot \bar{x} + d$ και $s_y = |c| \cdot s_x$ με $c = -2$, $d = 5$:

$$\bar{y} = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$$

$$s_y = |-2| \cdot 2 = 4$$

Επειδή $\bar{y} < 0$, στον τύπο του CV χρησιμοποιούμε την $|\bar{y}|$:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{25} = 0,16 = 16\%$$

$CV_y = 16\%$. Η πρόσθεση του 5 άλλαξε τον CV — αν είχε γίνει μόνο ο πολλαπλασιασμός επί -2 , ο CV θα έμενε 13,33%.

Πανελλαδικές 2017 — Θέμα Γ (κανονική κατανομή)

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 40$. Γ2. Να αποδείξετε ότι $s = 5$.

Αν οι εργαζόμενοι είναι 400: Γ3. Πόσοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών; Γ4.

Πόσοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 και μικρότερη των 45 ετών;

Γ1 — η συμμετρία της κανονικής κατανομής

Η κανονική κατανομή είναι **συμμετρική ως προς τη μέση τιμή**. Άρα ακριβώς το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες της $\bar{x}$ και το 50% μικρότερες. Αφού το 50% έχει ηλικία μεγαλύτερη των 40:

$$\bar{x} = 40 \text{ ετών}$$

Γ2 — από το 16% στην τυπική απόκλιση

Στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων. Άρα εκτός αυτού βρίσκεται το $100\% - 68\% = 32\%$, και λόγω συμμετρίας το μισό, δηλαδή το **16%**, βρίσκεται αριστερά του $\bar{x} - s$.

Δίνεται ότι το 16% έχει ηλικία μικρότερη των 35, άρα:

$$\bar{x} - s = 35 \iff 40 - s = 35 \iff s = 5 \text{ έτη}$$

Γ3 — πάνω από 45 έτη

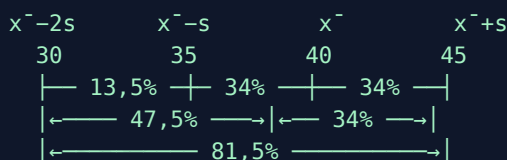
Είναι $45 = 40 + 5 = \bar{x} + s$. Με το ίδιο σκεπτικό, δεξιά του $\bar{x} + s$ βρίσκεται το **16%**.

$$16\% \cdot 400 = 0,16 \cdot 400 = 64 \text{ εργαζόμενοι}$$

Γ4 — μεταξύ 30 και 45 ετών

Είναι $30 = 40 - 2 \cdot 5 = \bar{x} - 2s$ και $45 = \bar{x} + s$. Σπάμε το ζητούμενο διάστημα στα δύο μισά:

σχήμα



Από $\bar{x} - 2s$ έως $\bar{x}$ βρίσκεται το μισό του 95%, δηλαδή 47,5%. Από $\bar{x}$ έως $\bar{x} + s$ βρίσκεται το μισό του 68%, δηλαδή 34%.

$$47,5\% + 34\% = 81,5\% \implies 0,815 \cdot 400 = 326 \text{ εργαζόμενοι}$$

Γ3: 64 εργαζόμενοι. **Γ4:** 326 εργαζόμενοι.

Πανελλαδικές 2023 — Θέμα Γ (ομαδοποιημένα δεδομένα)

Οι ώρες που διέθεσαν μαθητές στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης ομαδοποιήθηκαν: [8,12) με $x_1 = 10$, $v_1 = 20$ · [12,16) με $x_2 = 14$, $v_2 = 15$ · [16,20) με v_3 · [20,24) με $v_4 = 5$. Δίνεται ότι $\bar{x} = 14$.

Γ1. Να δείξετε ότι $v_3 = 10$. **Γ2.** Να συμπληρώσετε τον πίνακα. **Γ3.** Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 . **Γ4.** Να υπολογίσετε τον CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Γ1 — εξίσωση από τη μέση τιμή

Οι κεντρικές τιμές που λείπουν: $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$ και $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$. Το μέγεθος του

δείγματος είναι $n = 20 + 15 + v_3 + 5 = 40 + v_3$. Από τον τύπο $\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{n}$:

$$\frac{10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot v_3 + 22 \cdot 5}{40 + v_3} = 14$$

$$(200 + 210 + 18v_3 + 110) = 14(40 + v_3)$$

$$520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \iff 4v_3 = 40 \iff v_3 = 10$$

Γ2 — ο συμπληρωμένος πίνακας

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[8, 12)	10	20	200	$(-4)^2 \cdot 20 = 320$
[12, 16)	14	15	210	$0^2 \cdot 15 = 0$
[16, 20)	18	10	180	$4^2 \cdot 10 = 160$
[20, 24)	22	5	110	$8^2 \cdot 5 = 320$
Σύνολο	—	50	700	800

Έλεγχος: $\bar{x} = \frac{700}{50} = 14 \checkmark$

Γ3 — διακύμανση

Η μέση τιμή είναι ακέραιος, οπότε ο ορισμός (3) είναι ο γρηγορότερος δρόμος:

$$s^2 = \frac{1}{v} \cdot \Sigma (x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{800}{50} = 16$$

Γ4 — συντελεστής μεταβολής και ομοιογένεια

$$s = \sqrt{16} = 4 \quad CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \approx 0,2857 = 28,57\%$$

Επειδή $CV \approx 28,57\% > 10\%$, το δείγμα **δεν είναι ομοιογενές**.

Πανελλαδικές 2024 — Θέμα Γ (όριο + Στατιστική)

Οι τιμές της θερμοκρασίας (σε °C) σε 5 πόλεις ήταν: 22, 18, 20 + κ, 14, 16, όπου κ πραγματικός. Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = 20\%$ και η τυπική απόκλιση είναι s

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$. Γ1. Να δείξετε ότι $s = 4$. Γ2. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$. Γ3. Να δείξετε ότι $\kappa = 10$ και να βρείτε τη διάμεσο. Γ4. Αν οι τιμές αυξηθούν κατά 10%, να υπολογίσετε τον νέο CV.

Γ1 — το όριο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Η αντικατάσταση δίνει $\frac{1 + 6 - 7}{2 - 2} = \frac{0}{0}$. Παραγοντοποιούμε: το τριώνυμο $x^2 + 6x - 7$ έχει $\Delta = 36 + 28 = 64$ και ρίζες $x = 1, x = -7$, άρα $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$. Επίσης $2x - 2 = 2(x - 1)$:

$$s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 7)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Γ2 — από τον CV στη μέση τιμή

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0,20 = \frac{4}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{4}{0,20} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Γ3 — εύρεση του κ και διάμεσος

$$\frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90 + \kappa}{5} = 20 \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Άρα οι τιμές είναι 22, 18, 30, 14, 16. Σε αύξουσα σειρά:

σχήμα

14 16 18 22 30

↑

3η θέση ($v = 5$, περιττό)

$$\delta = 18^\circ \text{C}$$

Γ4 — αύξηση κατά 10%

Η αύξηση κατά 10% είναι πολλαπλασιασμός επί 1,1, δηλαδή $y = 1,1 \cdot x$. Τότε:

$$\bar{y} = 1,1 \cdot 20 = 22 \quad s_y = |1,1| \cdot 4 = 4,4$$

$$CV_y = \frac{4,4}{22} = 0,20 = 20\%$$

Ο συντελεστής μεταβολής **παραμένει 20%**: ο CV είναι αναλλοίωτος στον πολλαπλασιασμό όλων των παρατηρήσεων με θετική σταθερά.

Πανελλαδικές 2022 — Θέμα Δ (παράγωγος + κανονική κατανομή)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$. **Δ1.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και η $f'(x)$. **Δ2.** Ο

χρόνος επιστροφής (σε λεπτά) ακολουθεί την κανονική κατανομή, με $\bar{x} = \frac{1}{f'(2)}$ και s

$= \frac{1}{2f'(1)}$. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 9$ και $s = 2$.

Δ3. Αν οι μαθητές είναι 2000, πόσοι έχουν

χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά και πόσοι πάνω από 15 λεπτά;

Δ4. Να

υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αν ο χρόνος αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

Δ1 — πεδίο ορισμού και παράγωγος

Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $A = \mathbb{R} - \{-1\}$. Με τον κανόνα του πηλίκου:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2 — μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = 9$$

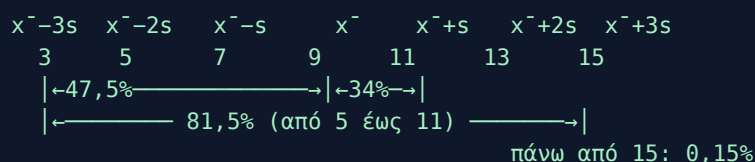
$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow s = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{0,5} = 2$$

Δ3 — ανάγνωση της κανονικής κατανομής

Εντοπίζουμε τα όρια σε πολλαπλάσια της s γύρω από την $\bar{x} = 9$:

$$5 = 9 - 4 = \bar{x} - 2s \quad 11 = 9 + 2 = \bar{x} + s \quad 15 = 9 + 6 = \bar{x} + 3s$$

σχήμα



Από $\bar{x} - 2s$ έως $\bar{x}$: 47,5%. Από $\bar{x}$ έως $\bar{x} + s$: 34%.

$$47,5\% + 34\% = 81,5\% \Rightarrow 0,815 \cdot 2000 = 1630 \text{ μαθητές}$$

Πάνω από $\bar{x} + 3s$: εκτός του διαστήματος $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ βρίσκεται το $100\% - 99,7\% = 0,3\%$, και λόγω συμμετρίας δεξιά το μισό:

$$0,15\% \cdot 2000 = 0,0015 \cdot 2000 = 3 \text{ μαθητές}$$

Δ4 — αύξηση κατά 3 λεπτά

Πρόκειται για πρόσθεση σταθεράς, $y = x + 3$:

$$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12 \text{ λεπτά} \quad s_y = s_x = 2 \text{ λεπτά}$$

Η μέση τιμή **μετατοπίζεται** κατά 3, η τυπική απόκλιση **μένει ίδια**: η πρόσθεση σταθεράς μετακινεί ολόκληρη την κατανομή χωρίς να αλλάζει τη διασπορά της.

Τελική Επανάληψη

Οι τύποι και οι ορισμοί της ύλης με μια ματιά

Όλη η εξεταστέα ύλη σε μία σελίδα: οι τύποι που πρέπει να ξέρεις απ' έξω και οι ορισμοί με τη διατύπωση του σχολικού βιβλίου — αυτή που παίρνει όλες τις μονάδες στο Θέμα Α.

Κεφάλαιο 1 — Διαφορικός Λογισμός

Οι τύποι παραγώγισης

$$(c)' = 0$$

σταθερή συνάρτηση

$$(x)' = 1$$

ταυτοτική συνάρτηση

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$$

p ρητός

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

ημίτονο

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

προσοχή στο μείον

$$(\epsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \text{ εφαπτομένη}$$

$$(e^x)' = e^x$$

εκθετική

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ λογαριθμική}$$

Οι κανόνες παραγώγισης

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

πολλαπλάσιο

$$(f + g)' = f' + g'$$

άθροισμα

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

γινόμενο

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ πηλίκο}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

σύνθετη

$$\alpha(t) = \upsilon'(t) = x''(t)$$

επιτάχυνση

Οι βασικοί τύποι του κεφαλαίου

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ορισμός παραγώγου}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

εξίσωση εφαπτομένης

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(x_0)$$

συντελεστής διεύθυνσης

$$v(t) = x'(t)$$

ταχύτητα

Οι ορισμοί που ζητούνται αυτούσιοι

Συνεχής συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι **πραγματικός αριθμός**, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της.

Συνάρτηση πρώτης παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad \text{Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της } f.$$

Γνησίως αύξουσα — γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** όταν ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Τοπικό μέγιστο — τοπικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 , και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

Κριτήριο 1ης παραγώγου

$f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta \Rightarrow$ η f γνησίως **αύξουσα** στο Δ .

$f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta \Rightarrow$ η f γνησίως **φθίνουσα** στο Δ .

$f'(x_0) = 0$, $f' > 0$ στο (α, x_0) και $f' < 0$ στο $(x_0, \beta) \Rightarrow$ **μέγιστο** στο x_0 .

$f'(x_0) = 0$, $f' < 0$ στο (α, x_0) και $f' > 0$ στο $(x_0, \beta) \Rightarrow$ **ελάχιστο** στο x_0 .

Κεφάλαιο 2 — Στατιστική

Οι τύποι

$$v_1 + v_2 + \dots + v_K = v$$

άθροισμα συχνοτήτων

$$f_i = \frac{v_i}{n} \text{ σχετική συχνότητα}$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

ιδιότητα σχετικών

$$N_i = v_1 + \dots + v_i$$

αθροιστική συχνότητα

$$\alpha_i = \frac{v_i \cdot 360^\circ}{n} = f_i \cdot 360^\circ$$

τόξο κυκλικού

$$\bar{x} = \frac{\sum t_i}{n} \text{ μέση τιμή}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{n} = \sum x_i f_i$$

μέση τιμή σε πίνακα

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \text{ σταθμικός μέσος}$$

R = μέγιστη – ελάχιστη

εύρος

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (t_i - \bar{x})^2$$

διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum t_i^2 - \frac{(\sum t_i)^2}{n} \right]$$

υπολογιστικός τύπος

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

για πίνακα συχνοτήτων

$$s = \sqrt{s^2}$$

τυπική απόκλιση

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \text{ συντελεστής μεταβολής}$$

$$CV \leq 10\% \Rightarrow \text{ομοιογενές}$$

κριτήριο ομοιογένειας

$$\text{κεντρική τιμή} = \frac{\text{κάτω} + \text{άνω όριο}}{2} \text{ ομαδοποιημένα}$$

$$c = \frac{R}{k} \text{ πλάτος κλάσης}$$

Κανονική κατανομή

$$(\bar{x} - s, \bar{x} + s) \rightarrow 68\%$$

$$34\% + 34\%$$

$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) \rightarrow 95\%$$

$$47,5\% + 47,5\%$$

$$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) \rightarrow 99,7\%$$

$$49,85\% + 49,85\%$$

$$R \approx 6s$$

εύρος στην κανονική

Μετασχηματισμοί παρατηρήσεων

$$y = x + c \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + c, s_y = s_x$$

πρόσθεση σταθεράς

$$y = c \cdot x \Rightarrow \bar{y} = c \cdot \bar{x}, s_y = |c| \cdot s_x$$

πολλαπλασιασμός

Οι ορισμοί που ζητούνται αυτούσιοι

(Απόλυτη) συχνότητα n_i

Ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Σχετική συχνότητα f_i

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα n_i με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα

$$f_i = \frac{n_i}{n} \text{ της τιμής } x_i.$$

Διάμεσος (δ)

Διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά** ορίζεται ως η **μεσαία παρατήρηση** όταν το n είναι **περιττός** αριθμός, ή ο **μέσος όρος (ημιάθροισμα)** των **δύο μεσαίων** παρατηρήσεων όταν το n είναι **άρτιος** αριθμός.

Μεταβλητές

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές** και τις συμβολίζουμε συνήθως με **κεφαλαία γράμματα** $X, Y, Z, B, \dots$

Ποσοτικές μεταβλητές — διακριτές και συνεχείς

Διακριτές: παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές. **Συνεχείς:** μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

Τα δέκα λάθη που κοστίζουν μονάδες

#	Το λάθος	Το σωστό
1	$(\sin x)' = \eta \mu x$	$(\sin x)' = -\eta \mu x$
2	$(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
3	$(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	Παρονομαστής πηλίκου: $g(x)$	Παρονομαστής: $(g(x))^2$
5	$f'(x) < 0 \Rightarrow$ γνησίως αύξουσα	$f'(x) < 0 \Rightarrow$ γνησίως φθίνουσα
6	Ραβδόγραμμα για ποσοτική	Ραβδόγραμμα για ποιοτική
7	Διάγραμμα συχνοτήτων για ποιοτική	Διάγραμμα συχνοτήτων για ποσοτική
8	Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς	Είναι μέτρο θέσης
9	Η διακύμανση έχει τις ίδιες μονάδες	Τις ίδιες μονάδες έχει η τυπική απόκλιση
10	Ο CV εξαρτάται από τις μονάδες	Ο CV είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες